

Les $\mathbb{R}$ -algèbres de dimension 2

Marc Lorenzi

18 août 2026

1 Algèbres

1.1 Rappels

Je vais supposer que le lecteur sait ce que sont un anneau et un espace vectoriel. J'imagine qu'il sait aussi ce qu'est une algèbre, mais je vais le rappeler quand même. Après tout, c'est l'objet de cet article.

Définition 1. Étant donné un corps $\mathbb{K}$, une $\mathbb{K}$ -algèbre est un sextuplet $(A, +, \times, ., 0, 1)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- $(A, +, \times, 0, 1)$ est un anneau.
- $(A, +, ., 0)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in A$, $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$.

Une sous-algèbre de l'algèbre A est une partie de A qui est à la fois un sous-anneau de A et un sous-espace vectoriel de A . L'ensemble $\mathbb{K}1 = \{\lambda.1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ est une sous-algèbre de A . C'est de plus un corps isomorphe à $\mathbb{K}$. Il suffit pour cela de considérer l'application $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ définie par $f(\lambda) = \lambda.1$. Dans la suite, nous identifierons $\mathbb{K}'$ et $\mathbb{K}$. Grâce à cette identification, nous avons $\mathbb{K} \subseteq A$. De plus, l'opération $.$ se confond avec l'opération $\times$. Enfin, la troisième propriété ci-dessus nous dit que les éléments de $\mathbb{K}$ commutent avec tous les éléments de A .

1.2 Polynôme minimal

Supposons que A est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative de dimension finie n . Soit $x \in A$. La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une famille de cardinal $n + 1$ dans un espace vectoriel de dimension n , elle est donc liée : il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ pas tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

Dit autrement, il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) = 0$. Posons

$$Z(x) = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(x) = 0\}$$

L'ensemble $Z(x)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal et $Z(x) \neq \{0\}$, il existe un unique polynôme unitaire Π_x tel que

$$Z(x) = \Pi_x \mathbb{K}[X]$$

Le polynôme Π_x peut aussi être caractérisé (exercice) comme étant l'unique polynôme unitaire de degré minimal de $Z(x)$.

Définition 2. Le polynôme Π_x est le *polynôme minimal* de x . Le *degré* de x est le degré du polynôme Π_x .

Par exemple, le degré de x est égal à 1 si et seulement si $x \in \mathbb{K}$. On a alors $\Pi_x = X - x$.

Proposition 1. On suppose que A est un anneau intègre. Pour tout $x \in A$, Π_x est un polynôme irréductible.

Démonstration. Soit $x \in A$. Supposons que $\Pi_x = AB$ où $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a $0 = \Pi_x(x) = A(x)B(x)$. Comme A est intègre, on a $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$. Par exemple, $A(x) = 0$ et donc $A \in Z(x)$. De là, Π_x divise A . Mais A divise Π_x , donc les polynômes A et Π_x sont associés. En particulier, $\deg A = \deg \Pi_x$ et donc $\deg B = 0$. Ainsi, B est constant. $\square$

Si A n'est pas intègre, il est tout à fait possible que Π_x ne soit pas irréductible. Nous en verrons des exemples plus loin.

2 Premiers pas

2.1 Introduction

Nous allons dans cet article déterminer toutes les $\mathbb{R}$ -algèbres de dimension 2. Nous montrerons qu'il en existe, à isomorphisme près, exactement trois. Dans toute la suite, on se donne une $\mathbb{R}$ -algèbre A de dimension 2.

Avec notre identification, le corps $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ est une sous-algèbre de A de dimension 1. Soit $a \notin \mathbb{R}$. Un tel a existe car $\dim A > 1$. La famille $(1, a)$, libre et de cardinal 2, est donc une base de A . Ainsi, $A = \langle 1, a \rangle$: tout élément z de A s'écrit de façon unique $z = x + ay$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

Comme $a^2 \in A$, il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 = u + va$.

Le polynôme $X^2 - vX - u$ s'annule en a , ce polynôme est donc un multiple de Π_a . De plus, ce polynôme est de degré 2 et $a \notin \mathbb{R}$, donc

$$\Pi_a = X^2 - vX - u$$

Proposition 2. A est une algèbre commutative.

Démonstration. Soient $z, z' \in A$. Écrivons $z = x + ay$ et $z' = x' + ay'$ où $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. On a alors

$$zz' = xx' + (xy' + x'y)a + yy'a^2$$

Or, $a^2 = u + va$, donc

$$zz' = (xx' + uyy') + (xy' + x'y + vyy')a$$

On retrouve la même valeur pour $z'z$, donc la multiplication est commutative. $\square$

2.2 Retour sur le polynôme minimal de a

Mettons le polynôme Π_a sous forme canonique. On a

$$\Pi_a = \left(X - \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(v^2 + 4u)$$

Posons $\Delta = v^2 + 4u$. Pour déterminer les caractéristiques de l'algèbre A , nous allons discuter sur le signe de Δ . Commençons par un cas « bien connu ».

2.3 Le cas $\Delta < 0$

Supposons $\Delta < 0$. Posons $\Delta = -\delta^2$ où $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\Pi_a = \left(X - \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

En évaluant en a et en factorisant $\delta^2/4$, on obtient

$$\left(\frac{2a - v}{\delta}\right)^2 = -1$$

Posons $i = (2a - v)/\delta$, de sorte que $i^2 = -1$. Comme i est combinaison linéaire de 1 et a et que le coefficient en a n'est pas nul, on a $i \notin \mathbb{R}$. De là, la famille $(1, i)$ est libre de cardinal 2, cette famille est donc une base de A . Ainsi, $A = \langle 1, i \rangle$. Nous avons réussi à nous débarrasser de l'élément a « arbitraire » pour le remplacer par i qui est tout à fait caractéristique de notre algèbre.

On montre ensuite facilement que A est isomorphe à la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'isomorphisme est la fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) = \dots x + iy$! Le i du membre de gauche est le $i \in A$ alors que celui du membre de droite est le $i \in \mathbb{C}$.

On suppose que le lecteur a quelques connaissances sur $\mathbb{C}$, en particulier que $\mathbb{C}$ est un corps. Nous n'en dirons donc pas plus. Bref, nous avons trouvé notre première $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension 2 et en plus c'est un corps. Nous allons dans les deux sections suivantes déterminer les deux autres.

3 Le cas $\Delta = 0$

3.1 Écriture canonique

Supposons $\Delta = 0$. On a cette fois

$$\Pi_a = \left(X - \frac{v}{2}\right)^2$$

En posant $\omega = a - v/2$, on a $\omega^2 = 0$. Remarquons que $\omega \notin \mathbb{R}$. Comme dans le premier cas, $A = \langle 1, \omega \rangle$. Le polynôme minimal de ω est

$$\Pi_\omega = X^2$$

Remarquons que Π_ω n'est pas irréductible. Tout élément z de A s'écrit de façon unique $z = x + \omega y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Les opérations dans A s'écrivent

$$\begin{aligned}(x + \omega y) + (x' + \omega y') &= (x + x') + \omega(y + y') \\ (x + \omega y) \times (x' + \omega y') &= (xx') + \omega(xy' + x'y)\end{aligned}$$

L'algèbre A est appelée l'algèbre des *nombre duaux*. Nous noterons dorénavant $\mathbb{D} = A$.

3.2 Conjugué, trace, norme

Définition 3. Soit $z = x + \omega y \in \mathbb{D}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Le *conjugué* de z est $\bar{z} = x - \omega y$. La *trace* de z est $\text{Tr}(z) = z + \bar{z}$ et la *norme* de z est $N(z) = z\bar{z}$.

Remarquons que $\text{Tr}(z) = 2x$ et $N(z) = x^2$.

Proposition 3. La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme involutif de l'algèbre $\mathbb{D}$.

Démonstration. On vérifie facilement les propriétés suivantes.

- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\bar{\bar{z}} = z$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{D}$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{D}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\bar{\bar{z}} = z$.

□

Proposition 4. Pour tous $z, z' \in \mathbb{D}$, $N(zz') = N(z)N(z')$.

Démonstration. En effet,

$$N(zz') = zz'\overline{zz'} = zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z}z'\bar{z}' = N(z)N(z')$$

□

La fonction $N : (\mathbb{D}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \times)$ est ainsi un morphisme de monoïdes.

3.3 Inversibles et diviseurs de zéro

Proposition 5. Soit $z \in \mathbb{D}$. z est inversible si et seulement si $N(z) \neq 0$. On alors $z^{-1} = \bar{z}/N(z)$.

Démonstration. Supposons $N(z) = 0$. On a alors $z\bar{z} = 0$, donc z est un diviseur de zéro et n'est pas inversible. Inversement, supposons $N(z) \neq 0$. On a alors

$$z \frac{\bar{z}}{N(z)} = \frac{z\bar{z}}{N(z)} = 1$$

donc z est inversible et $z^{-1} = \bar{z}/N(z)$. $\square$

En notant $\mathbb{D}^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{D}$, on a donc

$$\mathbb{D}^\times = \{x + \omega y : x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{D} \setminus \langle \omega \rangle$$

La fonction $N : \mathbb{D}^\times \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes.

Proposition 6. *Les diviseurs de zéro sont les multiples réels de ω .*

Démonstration. Soit $z = x + \omega y \in \mathbb{D}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Rappelons que $N(z) = x^2$. Si $x \neq 0$, alors $N(z) \neq 0$ donc z est inversible et n'est pas un diviseur de zéro. Si $x = 0$, alors $z = \omega y$. De là, $z^2 = 0$ donc z est un diviseur de zéro. En fait, z est même nilpotent. $\square$

3.4 Les automorphismes de $\mathbb{D}$

Un *automorphisme* de l'algèbre $\mathbb{D}$ est une bijection $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ qui est à la fois un automorphisme de l'anneau $\mathbb{D}$ et un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$. Via notre identification entre les réels et les multiples de 1, f est un automorphisme si et seulement si

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{D}$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{D}$, $f(zz') = f(z)f(z')$.

Soit f un automorphisme de $\mathbb{D}$. Soit $z = x + \omega y \in \mathbb{D}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(z) = f(x) + f(\omega)f(y) = x + f(\omega)y$$

De plus, $\omega^2 = 0$ donc $f(\omega)^2 = 0$. De là, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\omega) = \lambda\omega$. On a donc

$$f(z) = x + \lambda\omega y$$

De simples vérifications montrent que, inversement, une telle application f est un automorphisme de $\mathbb{D}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$.

Particularisons un peu : quels sont les automorphismes *involutifs* de $\mathbb{D}$, c'est à dire les automorphismes f de $\mathbb{D}$ tels que $f^{-1} = f$?

Proposition 7. *L'algèbre $\mathbb{D}$ possède 2 automorphismes involutifs qui sont $\text{id}_{\mathbb{D}}$ et $z \longmapsto \bar{z}$.*

Démonstration. Soit f un automorphisme de $\mathbb{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + \omega y) = x + \lambda\omega y$. Supposons f involutif. On a en particulier

$$\omega = f(f(\omega)) = f(\lambda\omega) = \lambda^2\omega$$

et donc $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$. Ainsi, $f = \text{id}_{\mathbb{D}}$ ou $f : z \longmapsto \bar{z}$. Inversement, ces deux fonctions sont bien des automorphismes involutifs de $\mathbb{D}$. $\square$

3.5 Racines carrées

Soit $z = x + \omega y \in \mathbb{D}$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $w = a + b\omega$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On a $w^2 = z$ si et seulement si $a^2 = x$ et $2ab = y$.

- Si $x < 0$, alors z n'a pas de racine carrée.
- Si $x = 0$, alors $w^2 = z$ si et seulement si $a = 0$ et $y = 0$. Dit autrement, si $y \neq 0$, alors z n'a pas de racine carrée. Sinon, $z = 0$ et les racines carrées de z sont les multiples réels de ω .
- Si $x > 0$, alors $w^2 = z$ si et seulement si $a = \varepsilon\sqrt{x}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $b = \varepsilon y/2\sqrt{x}$. z possède donc deux racines carrées opposées.

4 Le cas $\Delta > 0$

4.1 Écriture canonique

Supposons $\Delta > 0$. Posons $\Delta = \delta^2$ où $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\left(a - \frac{v}{2}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

d'où

$$\left(\frac{2a - v}{\delta}\right)^2 = 1$$

Posons $\mu = (2a - v)/\delta$, de sorte que $\mu^2 = 1$. Comme $a \notin \mathbb{R}$, on a $\mu \notin \mathbb{R}$. Comme dans les deux premiers cas, $A = \langle 1, \mu \rangle$. Le polynôme minimal de μ est

$$\Pi_\mu = X^2 - 1$$

Remarquons que Π_μ n'est pas irréductible. Tout élément z de A s'écrit de façon unique $z = x + \mu y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Les opérations dans A s'écrivent

$$\begin{aligned}(x + \mu y) + (x' + \mu y') &= (x + x') + \mu(y + y') \\ (x + \mu y) \times (x' + \mu y') &= (xx' + yy') + \mu(xy' + x'y)\end{aligned}$$

On définit comme pour les nombres duaux $\bar{z} = x - \mu y$. L'application $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme involutif de l'algèbre A . La trace de z est $\text{Tr}(z) = z + \bar{z}$ et la norme de z est $N(z) = z\bar{z}$. On a

$$\begin{aligned}\text{Tr}(z) &= 2x \\ N(z) &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

On vérifie comme dans le cas des nombres duaux que pour tous $z, z' \in A$, $N(zz') = N(z)N(z')$.

Nous appellerons A l'algèbre des *nombres hyperboliques*. Nous noterons $A = \mathbb{H}$.

4.2 Inversibles et diviseurs de zéro

En procédant comme pour les nombres réels, on obtient que $z \in \mathbb{H}$ est inversible si et seulement si $N(z) \neq 0$. De plus, $z^{-1} = \bar{z}/N(z)$. Enfin, si $N(z) = 0$, alors $z\bar{z} = 0$ donc z est un diviseur de zéro. En posant $z = x + \mu y$ où $x, y \in \mathbb{R}$, z est un diviseur de zéro si et seulement si $x^2 - y^2 = 0$, ou encore $(y - x)(y + x) = 0$. Ainsi, l'ensemble des diviseurs de zéro est la réunion des deux droites $\langle 1 + \mu \rangle$ et $\langle 1 - \mu \rangle$.

4.3 Racines carrées

Notons $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{H} : z^2 = 1\}$.

Proposition 8. $\mathcal{U} = \{-1, 1, -\mu, \mu\}$.

Démonstration. Soit $z = x + \mu y \in \mathcal{U}$. On a $x^2 + y^2 = 1$ et $2xy = 0$. La deuxième égalité nous dit que $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, alors la première égalité donne $y = \pm 1$ donc $z = \pm \mu$. Si $y = 0$, alors $z = x = \pm 1$. L'inclusion réciproque est immédiate. $\square$

Regardons pour commencer les éléments non inversibles de $\mathbb{H}$.

Proposition 9. Soit $z = t(1 + \mu) \in \mathbb{H}$, où $t \in \mathbb{R}$. z a une racine carrée si et seulement si $t \geq 0$. z possède dans ce cas deux racines carrées opposées.

Démonstration. Soit $w = a + b\mu$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On a $w^2 = z$ si et seulement si (1) $a^2 + b^2 = t$ et (2) $2ab = t$.

Supposons $\varepsilon = 1$. La combinaison (1) – (2) donne $(a - b)^2 = 0$, d'où $a = b$. Les égalités (1) et (2) sont alors identiques et deviennent $2a^2 = t$. Si $t < 0$, il n'y a pas de solution. Sinon, il en a deux et les racines carrées de z sont

$$\pm \sqrt{\frac{t}{2}}(1 + \mu)$$

Pour être plus précis, il y a une unique racine carrée si $t = 0$ (c'est à dire $z = 0$) et deux sinon. $\square$

Proposition 10. Soit $z = t(1 - \mu) \in \mathbb{H}$, où $t \in \mathbb{R}$. z a une racine carrée si et seulement si $t \geq 0$. z possède dans ce cas deux racines carrées opposées.

Démonstration. Même démonstration, en remplaçant μ par $-\mu$. $\square$

Passons maintenant aux inversibles de $\mathbb{H}$. Tout d'abord, la question de l'unicité.

Proposition 11. Soit $z \in \mathbb{H}$ inversible. On suppose que z a une racine carrée w . Alors, les racines carrées de z sont $w, -w, \mu w$ et $-\mu w$. De plus ces 4 éléments de $\mathbb{H}$ sont distincts deux à deux.

Démonstration. On a $N(w)^2 = N(z) \neq 0$ donc $N(w) \neq 0$ et donc w est inversible. Soit $t \in \mathbb{H}$. On a $t^2 = z$ si et seulement si $t^2 = w^2$, ou encore, comme w est inversible, $(tw^{-1})^2 = 1$, c'est à dire $tw^{-1} \in \mathcal{U}$. Les racines carrées de z sont donc $\pm w$ et $\pm \mu w$. Si $a, b \in \mathcal{U}$ et $aw = bw$ alors, comme w est inversible, $a = b$. Les 4 racines carrées que nous avons trouvées sont donc distinctes. $\square$

Passons à l'existence.

Proposition 12. *Soit $z = x + \mu y \in \mathbb{H}$ inversible. z a une racine carrée si et seulement si $N(z) > 0$ et $x \geq 0$.*

Démonstration. Comme z est inversible, $N(z) \neq 0$. Supposons que z a une racine carrée $w = a + b\mu$, où $a, b \in \mathbb{R}$. De $w^2 = z$, on déduit $N(z) = N(w)^2 \geq 0$. De plus, $x = a^2 + b^2 \geq 0$. Inversement, supposons $N(z) > 0$ et $x \geq 0$. Soit $r = \sqrt{N(z)}$. On a

$$x^2 - y^2 = r^2$$

et $x \geq 0$. Il existe donc un réel t (unique) tel que $x = r \operatorname{ch} t$ et $y = r \operatorname{sh} t$. Soit

$$w = \sqrt{r} \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \mu \sqrt{r} \operatorname{sh} \frac{t}{2}$$

On a

$$w^2 = r \left(\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} \right) + 2\mu r \operatorname{ch} \frac{t}{2} \operatorname{sh} \frac{t}{2} = r \operatorname{ch} t + \mu r \operatorname{sh} t = z$$

$\square$

Remarque.

4.4 Les automorphismes de $\mathbb{H}$

Soit f un automorphisme de $\mathbb{H}$. Soit $z = x + \mu y \in \mathbb{H}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(z) = f(x) + f(\mu)f(y) = x + f(\mu)y$$

De plus, $\mu^2 = 1$ donc $f(\mu)^2 = f(1) = 1$, donc $f(\mu) \in \mathcal{U}$. Il y a donc 4 possibilités pour $f(\mu)$ qui sont ± 1 et $\pm \mu$.

Si $f(\mu) = \pm 1$, alors $f(z) = x \pm y \in \mathbb{R}$. La fonction f n'est pas bijective, rejetons donc cette possibilité. On a donc $f(\mu) = \pm \mu$. De là, deux possibilités :

- Si $f(\mu) = \mu$, alors pour tout $z \in \mathbb{H}$, $f(z) = z$.
- Si $f(\mu) = -\mu$, alors pour tout $z \in \mathbb{H}$, $f(z) = \bar{z}$.

Inversement, $\operatorname{id}_{\mathbb{D}}$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont deux automorphismes de $\mathbb{H}$ (et ils sont involutifs).

5 Le nombre de $\mathbb{R}$ -algèbres de dimension 2

L'étude précédente montre qu'il existe à isomorphisme près au plus 3 $\mathbb{R}$ -algèbres de dimension 2, qui sont $\mathbb{C}$, l'algèbre $\mathbb{D}$ des nombres duals et l'algèbre $\mathbb{H}$ des nombres hyperboliques.

$\mathbb{C}$ est un corps, alors que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ possèdent des diviseurs de zéro. Les algèbres $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ ne sont donc pas isomorphes à $\mathbb{C}$. De plus, $\mathbb{D}$ possède des éléments nilpotents non nuls, alors que $\mathbb{H}$ n'en possède pas. Ainsi, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ ne sont pas isomorphes.

Un petit détail reste à régler. Dans notre discussion, nous avons en fait écrit des phrases du type « si A est une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension 2 et $\Delta = 0 \dots$ ». Passe pour $\mathbb{C}$, tout le monde sait que les nombres complexes ça existe. Mais les algèbres $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ existent-elles ? La meilleure façon de s'en assurer est d'en exhiber des *modèles*, c'est à dire des $\mathbb{R}$ -algèbres concrètes isomorphes à $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$.

L'endroit idéal pour trouver ces modèles est la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels.

On peut prendre par exemple comme modèle de $\mathbb{C}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{C} = \langle I_2, U \rangle \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice identité est le neutre pour la multiplication, la matrice U a un carré égal à $-I_2$ et joue le rôle de i .

Pour construire un modèle de $\mathbb{D}$, il suffit de choisir une matrice non nulle de carré nul. Par exemple, un modèle de $\mathbb{D}$ est

$$\mathcal{D} = \langle I_2, \Omega \rangle \quad \text{où} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, un modèle de $\mathbb{H}$ est

$$\mathcal{H} = \langle I_2, J \rangle \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons finalement montré le résultat suivant.

Théorème 13. *Il existe, à isomorphisme près, exactement 3 $\mathbb{R}$ -algèbres de dimension 2, qui sont*

- *Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*
- *L'algèbre $\mathbb{D}$ des nombres duaux.*
- *L'algèbre $\mathbb{H}$ des nombres hyperboliques.*