

Les anneaux à 4 éléments

Marc Lorenzi

Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau à 4 éléments. Notons

$$\mathbb{A} = \{0, 1, a, b\}$$

Discutons sur le groupe $(\mathbb{A}, +)$. Il existe à isomorphisme près deux groupes de cardinal 4, que nous appellerons $(\mathbb{Z}_4, +)$ (le groupe des entiers modulo 4) et $(K_4, +)$ (le groupe de Klein).

1 Le cas K_4

1.1 Addition et début de multiplication

Dans le groupe K_4 , chaque élément est égal à son opposé. Voici la table d'addition.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Passons à la multiplication. Voici une table partielle.

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a		
b	0	b		

Remarquons que $a + 1 = b$. De là,

$$ab = a(a + 1) = a^2 + a$$

$$ba = (a + 1)a = a^2 + a$$

$$b^2 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + 1$$

Il suffit donc de connaître a^2 pour terminer le remplissage de la table de multiplication. Il y a 4 possibilités.

1.2 Le cas $a^2 = 0$

On a dans ce cas $ab = ba = a^2 + a = a$ et $b^2 = a^2 + 1 = 1$. La table de multiplication est alors

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	1

Il y a ainsi au plus un anneau possible dans le cas qui nous intéresse. Il resterait à vérifier que les opérations décrites par nos tables sont bien des opérations d'anneau. C'est bien le cas, mais nous ne le ferons pas.

1.3 Le cas $a^2 = 1$

On a alors $ab = ba = a^2 + a = 1 + a = b$ et $b^2 = a^2 + 1 = 1 + 1 = 0$. Les rôles de a et b sont inversés par rapport au cas précédent, on obtient un anneau isomorphe au précédent.

1.4 Le cas $a^2 = a$

On a alors $ab = ba = a^2 + a = a + a = 0$ et $b^2 = a^2 + 1 = a + 1 = b$. La table de multiplication est ainsi

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

Inversement, on connaît un tel anneau. Prenons $\mathbb{A} = \mathcal{P}(E)$, où $E = \{\alpha, \beta\}$ est un ensemble à deux éléments. Munissons $\mathbb{A}$ des opérations de différence symétrique Δ et d'intersection $\cap$. On obtient les tables d'addition et de multiplication ci-dessus en posant $0 = \emptyset$, $1 = E$, $a = \{\alpha\}$ et $b = \{\beta\}$.

Il y a ainsi un et un seul anneau vérifiant les conditions de ce paragraphe.

1.5 Le cas $a^2 = b$

On a alors $ab = ba = a^2 + a = b + a = 1$ et $b^2 = a^2 + 1 = b + 1 = a$. La table de multiplication est ainsi

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Remarquons que dans ce cas, l'anneau $\mathbb{A}$ est un corps.

Il y a ainsi au plus un anneau possible dans le cas qui nous intéresse. Il resterait à vérifier que les opérations décrites par nos tables sont bien des opérations d'anneau. C'est bien le cas, mais nous ne le ferons pas.

2 Le cas $\mathbb{Z}_4$

Dans le groupe $\mathbb{Z}_4$, il y a deux éléments égaux à leur opposé, l'un des deux étant évidemment 0. Peut-on avoir $1 + 1 = 0$? Non, car alors $a + a = a(1 + 1) = 0$ et de même $b + b = 0$. Donc, $1 + 1 = a$ ou $1 + 1 = b$. Les rôles de a et b étant symétriques, prenons par exemple $1 + 1 = a$. Voici la table d'addition.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	a	b	0
a	a	b	0	1
b	b	0	1	a

Passons à la multiplication. Comme $a = 1 + 1$, on a

$$a^2 = (1 + 1)^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = a + a = 0$$

Puis

$$ab = ba = a(a + 1) = a^2 + a = a$$

et

$$b^2 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

Voici donc la seule table de multiplication possible.

$\times$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	0	a
b	0	b	a	1

Inversement, on connaît un tel anneau. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ des entiers modulo 4, où l'addition et la multiplication de deux éléments se font en prenant le reste de la division par 4. On retrouve très précisément les tables de l'anneau $\mathbb{A}$ en prenant $a = 2$ et $b = 3$.

3 Bilan

Proposition 1. *Il existe, à isomorphisme près, 4 anneaux de cardinal 4. Ils sont tous commutatifs. L'un de ces anneaux est un corps. Les trois autres sont des anneaux non intègres.*