

Le corps des fractions d'un anneau intègre

Marc Lorenzi

2 mars 2021

1 Extensions d'un anneau

Nous allons montrer dans cet article que, sous certaines conditions, un anneau $\mathbb{A}$ peut être « plongé » dans un corps. Une définition naïve d'un « sur-corps » de $\mathbb{A}$ (nous dirons plutôt *extension* de $\mathbb{A}$) consisterait à considérer un corps contenant $\mathbb{A}$. Cette définition est trop restrictive.

Définition 1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux anneaux. Un *plongement* de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ est un morphisme d'anneaux injectif $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$.

Remarquons que $\varphi(\mathbb{A})$ est alors un sous-anneau de $\mathbb{B}$ isomorphe à $\mathbb{A}$.

Définition 2. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux anneaux et $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un plongement de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$. Le couple $(\mathbb{B}, \varphi)$ est appelé une *extension* de l'anneau $\mathbb{A}$.

Bien entendu, tout anneau contenant effectivement $\mathbb{A}$ est une extension de $\mathbb{A}$, en prenant pour φ l'application $x \mapsto x$.

Abusivement, nous sous-entendons parfois le plongement φ et nous dirons que $\mathbb{B}$ est une extension de $\mathbb{A}$. Mais il faut garder à l'esprit que deux plongements différents $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ et $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ donnent lieu à deux extensions différentes. Prenons par exemple l'anneau des entiers de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

L'application $\varphi : z \mapsto z$ est un plongement de $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{C}$. L'application $\psi : z \mapsto \bar{z}$ est un autre plongement. Les extensions $(\mathbb{C}, \varphi)$ et $(\mathbb{C}, \psi)$ sont donc deux extensions distinctes de $\mathbb{Z}[i]$.

Remarquons que la notion d'extension est transitive.

Proposition 1. Si $(\mathbb{B}, \varphi)$ est une extension de $\mathbb{A}$ et $(\mathbb{B}', \psi)$ est une extension de $\mathbb{B}$, alors $(\mathbb{B}', \psi \circ \varphi)$ est une extension de $\mathbb{A}$.

Démonstration. $\psi \circ \varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}'$ est la composée de deux morphismes injectifs. C'est donc aussi un morphisme injectif. $\square$

2 Conditions nécessaires

Soit $\mathbb{A}$ un anneau. Supposons que $\mathbb{A}$ possède une extension $(\mathbb{K}, \varphi)$ où $\mathbb{K}$ est un corps. Notons $\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \varphi(\mathbb{A})$. L'anneau $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$. En conséquence,

- Il est commutatif.
- Il est intègre, car tous ses éléments non nuls sont inversibles dans $\mathbb{K}$, et donc réguliers.
- Ses neutres pour l'addition et la multiplication sont distincts.

L'anneau $\mathbb{A}$ étant isomorphe à $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, il vérifie aussi ces conditions. Nous allons montrer que celles-ci sont suffisantes.

Dans toute la suite, nous nous donnons un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$. Nous notons 0 et 1 ses neutres respectifs pour l'addition et la multiplication. Enfin, nous supposons que $\mathbb{A}$ est commutatif, intègre, et que $0 \neq 1$.

3 Existence

Théorème 2. *L'anneau $\mathbb{A}$ possède une extension qui est un corps.*

Nous allons procéder en plusieurs étapes. Nous allons en fait construire une extension $\mathbb{K}$ de l'anneau $\mathbb{A}$ très particulière, appelée son *corps des fractions*.

3.1 Construction de l'ensemble $\mathbb{K}$

Notons $E = \mathbb{A} \times (\mathbb{A} \setminus \{0\})$. Définissons sur E une relation $\simeq$ en posant

$$(a, b) \simeq (c, d) \iff ad = bc$$

Proposition 3. *La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur E .*

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in E$. On a $ab = ba$, donc $(a, b) \simeq (a, b)$.
- Soient $(a, b), (c, d) \in E$. Supposons $(a, b) \simeq (c, d)$. On a $cb = bc = ad = da$, et donc $(c, d) \simeq (a, b)$.
- Soient $(a, b), (c, d), (e, f) \in E$. Supposons $(a, b) \simeq (c, d)$ et $(c, d) \simeq (e, f)$. On a $adf = bcf = bde$. Comme $d \neq 0$ et $\mathbb{A}$ est intègre, $af = be$, d'où $(a, b) \simeq (e, f)$.

□

On pose $\mathbb{K} = E / \simeq$. Nous noterons la classe du couple $(a, b) \in E$ par $a \oslash b$. Ainsi,

$$a \oslash b = \{(a', b') \in E, ab' = a'b\}$$

et

$$\mathbb{K} = \{a \oslash b, a, b \in \mathbb{A}, b \neq 0\}$$

Il s'agit maintenant de munir $\mathbb{K}$ d'une addition et d'une multiplication qui lui donneront une structure de corps.

3.2 Une addition dans $\mathbb{K}$

On pose, pour $a \otimes b, c \otimes d \in \mathbb{K}$,

$$(a \otimes b) + (c \otimes d) = (ad + bc) \otimes (bd)$$

Il s'agit tout d'abord de vérifier que cette définition est cohérente.

Proposition 4. Soient $(a, b), (c, d), (a', b'), (c', d') \in E$ tels que $(a, b) \simeq (a', b')$ et $(c, d) \simeq (c', d')$. Alors,

$$(ad + bc, bd) \simeq (a'd' + b'c', b'd')$$

Démonstration. On a

$$(ad + bc)b'd' = ab'dd' + bb'cd' = ba'dd' + bb'dc' = bd(a'd' + b'c')$$

□

Notre définition de l'addition dépend donc uniquement des *classes* et pas des *représentants* choisis pour écrire les classes.

Proposition 5. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien.

Démonstration.

- Nous avons déjà montré que l'addition est une loi de composition interne dans $\mathbb{K}$.
- La commutativité et l'associativité sont de simples vérifications. Elles ne présentent pas de difficulté.
- Le neutre pour l'addition est $0 \otimes 1$.
- L'opposé de $a \otimes b$ est $(-a) \otimes b$.

□

3.3 Une multiplication dans $\mathbb{K}$

On pose, pour $a \otimes b, c \otimes d \in \mathbb{K}$,

$$(a \otimes b) \times (c \otimes d) = (ac) \otimes (bd)$$

Ici encore, il faut vérifier que cette définition est cohérente.

Proposition 6. Soient $(a, b), (c, d), (a', b'), (c', d') \in E$ tels que $(a, b) \simeq (a', b')$ et $(c, d) \simeq (c', d')$. Alors,

$$(ac, bd) \simeq (a'c', b'd')$$

Démonstration. On a

$$acb'd' = ab'cd' = ba'dc' = bda'c'$$

□

Notre définition de la multiplication dépend donc seulement des classes et pas des représentants choisis.

Proposition 7. $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Démonstration.

- Nous avons déjà montré que $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien.
- Nous avons également déjà montré que la multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{K}$.
- La commutativité, l'associativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sont de simples vérifications.
- Le neutre pour la multiplication est $1 \otimes 1$.

□

Nous y sommes presque.

Proposition 8. $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps.

Démonstration.

- Nous savons déjà que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- Dans l'anneau $\mathbb{A}$, on a $0 \times 1 = 0 \neq 1 = 1 \times 1$. Ainsi, $(0, 1) \neq (1, 1)$ et donc $0 \otimes 1 \neq 1 \otimes 1$. Les neutres pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{K}$ sont distincts.
- Soit $a \otimes b \in \mathbb{K}$ non nul, c'est à dire que $a \neq 0$ (et b aussi, par définition des éléments de $\mathbb{K}$). On a alors

$$(a \otimes b) \times (b \otimes a) = (ab) \otimes (ba) = 1 \otimes 1$$

Ainsi, $a \otimes b$ est inversible.

□

3.4 Un plongement $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{K}$

Considérons l'application $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi(a) = a \otimes 1$.

Proposition 9. L'application φ est un plongement.

Démonstration.

- On a, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$,

$$\varphi(a) + \varphi(b) = (a \otimes 1) + (b \otimes 1) = (a + b) \otimes 1 = \varphi(a + b)$$

- De même,

$$\varphi(a) \times \varphi(b) = (a \otimes 1) \times (b \otimes 1) = ab \otimes 1 = \varphi(ab)$$

- Comme $\varphi(1) = 1 \otimes 1$, φ envoie le neutre pour la multiplication dans $\mathbb{A}$ sur le neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}$.
- Enfin, si $a \in \ker \varphi$ alors $\varphi(a) = a \otimes 1 = 0 \otimes 1$, c'est à dire $a = 0$. Le morphisme φ est donc injectif.

□

Corollaire 10. $(\mathbb{K}, \varphi)$ est une extension de l'anneau $\mathbb{A}$.

Démonstration. Par la proposition 8, $\mathbb{K}$ est un corps. Par la proposition 9, φ est un plongement de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{K}$. □

3.5 Spécificité de $\mathbb{K}$

L'extension $(\mathbb{K}, \varphi)$ n'est pas n'importe quelle extension de $\mathbb{A}$. Notons $\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \varphi(\mathbb{A})$:

Proposition 11. Tout élément x de $\mathbb{K}$ est de la forme $x = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, $b \neq 0$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}$. x est donc de la forme $\alpha \otimes \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\beta \neq 0$. Posons $a = \alpha \otimes 1$ et $b = \beta \otimes 1$. On a alors

$$x = \alpha \otimes \beta = (\alpha \otimes 1) \times (1 \otimes \beta) = (\alpha \otimes 1) \times (\beta \otimes 1)^{-1} = \frac{a}{b}$$

□

Remarquons au passage la très intéressante égalité, valable pour $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\beta \neq 0$:

$$(\alpha \otimes 1) / (\beta \otimes 1) = \alpha \otimes \beta$$

En notant abusivement $\alpha = \alpha \otimes 1$, ceci donne

$$\alpha / \beta = \alpha \otimes \beta$$

et nous conforte dans l'idée que la notation $\otimes$ est une *excellente* notation.

Définition 3. Une extension $(\mathbb{K}, \varphi)$ de $\mathbb{A}$ est appelée un *corps des fractions de l'anneau* $\mathbb{A}$ lorsque

- $\mathbb{K}$ est un corps.
- En posant $\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \varphi(\mathbb{A})$, on a

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}, b \neq 0 \right\}$$

Nous avons donc montré le résultat qui suit.

Théorème 12. *Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif, intègre, dans lequel $0 \neq 1$. Alors $\mathbb{A}$ possède un corps des fractions.*

Pour prendre deux exemples classiques,

- $\mathbb{Q}$ est un corps des fractions de $\mathbb{Z}$.
- Si $\mathbb{K}$ est un corps, le corps des fractions rationnelles à une indéterminée X , $\mathbb{K}(X)$ est un corps des fractions de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$.

Il faut remarquer que nous avons parlé *d'un* corps des fractions et pas *du* corps des fractions. Nous allons maintenant prouver qu'un tel corps est « essentiellement » unique, ce qui nous permettra de dire que $\mathbb{Q}$ est *le* corps des fractions de $\mathbb{Z}$, et que $\mathbb{K}(X)$ est *le* corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$.

4 Unicité

Dans cette section encore, nous nous donnons un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$. Nous notons 0 et 1 ses neutres respectifs pour l'addition et la multiplication. Enfin, nous supposons que $\mathbb{A}$ est commutatif, intègre, et que $0 \neq 1$. L'anneau $\mathbb{A}$ possède donc un corps des fractions.

Un anneau $\mathbb{A}$ peut bien entendu posséder plusieurs extensions très différentes. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des extensions de $\mathbb{Z}$. Cependant, comme nous allons le voir, $\mathbb{Q}$ est d'une certaine façon une extension minimale de $\mathbb{Z}$.

4.1 Introduction

Avant de commencer, voici un résultat très simple mais fort utile.

Proposition 13. *Soit $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{B}$ un morphisme d'un corps $\mathbb{K}$ vers un anneau $\mathbb{B}$ différent de l'anneau nul. Alors f est injectif.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$. x est donc inversible, puisque $\mathbb{K}$ est un corps. On a $xx^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$, et donc

$$f(x)f(x^{-1}) = f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{B}}$$

Il en résulte que $f(x)$ est inversible dans $\mathbb{B}$, et donc $f(x) \neq 0$ puisque $\mathbb{B}$ n'est pas l'anneau nul. En conséquence, $\ker f = \{0\}$, et f est effectivement injectif. $\square$

Définissons maintenant la notion de *morphisme d'extensions* (de $\mathbb{A}$).

Définition 4. Soient $(\mathbb{B}, \varphi)$ et $(\mathbb{B}', \psi)$ deux extensions de $\mathbb{A}$. Un morphisme d'extensions de $(\mathbb{B}, \varphi)$ vers $(\mathbb{B}', \psi)$ est une application $\xi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}'$ vérifiant :

- ξ est un morphisme d'anneaux.
- $\psi = \xi \circ \varphi$.

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème ci-dessous.

Théorème 14. Soient $(\mathbb{K}, \varphi)$ un corps des fractions de $\mathbb{A}$ et $(\mathbb{L}, \psi)$ une extension de $\mathbb{A}$, où $\mathbb{L}$ est un corps. Alors il existe un et un seul morphisme d'extensions de $(\mathbb{K}, \varphi)$ vers $(\mathbb{L}, \psi)$.

Remarquons que par la proposition 13, $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$. Ainsi, ce théorème nous dit qu'un corps des fractions $\mathbb{K}$ de $\mathbb{A}$ est, d'une certaine façon, une extension minimale de $\mathbb{A}$ qui soit un corps, car toute extension de $\mathbb{A}$ qui est un corps est aussi une extension de $\mathbb{K}$. Remarquons également que ce théorème entraîne l'unicité du corps des fractions à isomorphisme près :

Corollaire 15. Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ deux corps des fractions de l'anneau $\mathbb{A}$. Les corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont isomorphes.

Démonstration. Appliquons le théorème 14 à $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}'$. Il existe un morphisme d'extensions $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$. De même, en échangeant les rôles de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$, il existe un morphisme d'extensions $\psi : \mathbb{K}' \rightarrow \mathbb{K}$. Alors, $\chi = \psi \circ \varphi$ est un morphisme d'extensions de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$. Mais $id_{\mathbb{K}}$ est aussi trivialement un morphisme d'extensions de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$, donc par l'unicité affirmée par le théorème 14 (en prenant $\mathbb{L} = \mathbb{K}$), $\chi = id_{\mathbb{K}}$. De même, $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{K}'}$. Ainsi, φ est bijectif. $\square$

Venons-en maintenant à la preuve du théorème 14. Dans toute la suite, $(\mathbb{K}, \varphi)$ est un corps des fractions de $\mathbb{A}$. On note $\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \varphi(\mathbb{A})$. On se donne également une extension $(\mathbb{L}, \psi)$ de $\mathbb{A}$, où $\mathbb{L}$ est un corps, et on note $\mathbb{A}_{\mathbb{L}} = \psi(\mathbb{A})$.

4.2 Au moins un

L'application $\xi = \psi \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{A}_{\mathbb{L}}$. Nous allons prolonger ξ en un morphisme d'extensions de $(\mathbb{K}, \varphi)$ vers $(\mathbb{L}, \psi)$.

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, x s'écrit sous la forme $x = \frac{a}{b}$, où $a, b \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ et $b \neq 0$. Il semble naturel de considérer $\hat{\xi}(x) = \frac{\xi(a)}{\xi(b)}$, mais il nous faut tout d'abord prouver que cette définition ne dépend que de x et pas des éléments a et b de l'anneau $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ choisis pour représenter x . Pour cela, supposons que

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

où $a, b, a', b' \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, et $b, b' \neq 0$. On a alors $ab' = a'b$ et donc, en appliquant le morphisme d'anneaux ξ ,

$$\xi(a)\xi(b') = \xi(a')\xi(b)$$

Comme ξ est injectif, $\xi(b)$ et $\xi(b')$ sont non nuls. On peut donc diviser par ces éléments dans le corps $\mathbb{L}$ pour en déduire

$$\frac{\xi(a)}{\xi(b)} = \frac{\xi(a')}{\xi(b')}$$

On a donc bien indépendance des représentants choisis pour écrire x . On dispose donc d'une application $\hat{\xi} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ qui prolonge l'isomorphisme $\xi : \mathbb{A}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{L}}$.

Proposition 16. L'application $\hat{\xi}$ est un morphisme d'extensions de $(\mathbb{K}, \varphi)$ vers $(\mathbb{L}, \psi)$.

Démonstration. Tout d'abord, $\hat{\xi} \circ \varphi = \xi \circ \varphi = \psi$, par définition de ξ . Passons aux propriétés de morphisme.

Soient $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux éléments de $\mathbb{K}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$, et $b, d \neq 0$.

- On a, en utilisant les propriétés de morphisme de ξ ,

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(x+y) &= \hat{\xi}\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) \\ &= \frac{\xi(ad+bc)}{\xi(bd)} \\ &= \frac{\xi(a)\xi(d) + \xi(b)\xi(c)}{\xi(b)\xi(d)} \\ &= \frac{\xi(a)}{\xi(b)} + \frac{\xi(c)}{\xi(d)} \\ &= \hat{\xi}(x) + \hat{\xi}(y)\end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(xy) &= \hat{\xi}\left(\frac{ac}{bd}\right) \\ &= \frac{\xi(ac)}{\xi(bd)} \\ &= \frac{\xi(a)\xi(c)}{\xi(b)\xi(d)} \\ &= \frac{\xi(a)}{\xi(b)} \frac{\xi(c)}{\xi(d)} \\ &= \hat{\xi}(x)\hat{\xi}(y)\end{aligned}$$

- Enfin,

$$\hat{\xi}(1) = \hat{\xi}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\xi(1)}{\xi(1)} = 1$$

L'application $\hat{\xi}$ est donc un morphisme d'anneaux. $\square$

4.3 Au plus un

Lemme 17. *Il existe au plus un morphisme d'extensions de $(\mathbb{K}, \varphi)$ vers $(\mathbb{L}, \psi)$.*

Démonstration. Soient ξ et ξ' deux morphismes d'extensions de $(\mathbb{K}, \varphi)$ vers $(\mathbb{L}, \psi)$. Soit $x \in \mathbb{K}$. On peut écrire x sous la forme $x = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$, où $a, b \in \mathbb{A}$, $b \neq 0$. De là, $x\varphi(b) = \varphi(a)$. Appliquons ξ . Il vient

$$\xi(x)(\xi \circ \varphi)(b) = (\xi \circ \varphi)(a)$$

Mais $\xi \circ \varphi = \psi$, donc

$$\xi(x)\psi(b) = \psi(a)$$

d'où

$$\xi(x) = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$$

De même,

$$\xi'(x) = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$$

Ainsi, $\xi = \xi'$.

□