

Division aux puissances croissantes

Marc Lorenzi

3 février 2024

Proposition 1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose $B(0) \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + X^{n+1}R \\ \deg(Q) \leq n \end{cases}$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Supposons

$$A = BQ + X^{n+1}R = BQ' + X^{n+1}R'$$

où $\deg(Q) \leq n$ et $\deg(Q') \leq n$. On a alors

$$B(Q - Q') = X^{n+1}(R' - R)$$

En passant aux valuations,

$$\text{val}(Q - Q') = n + 1 + \text{val}(R' - R) \geq n + 1 > \deg(Q - Q')$$

On en déduit $Q - Q' = 0$ puis, en reportant, $R - R' = 0$.

Montrons l'existence par récurrence sur n . Pour simplifier la présentation, supposons $B(0) = 1$, le cas général s'en déduit facilement. Soit $Q = A(0)$. On a $\deg Q \leq 0$ et

$$(A - BQ)(0) = 0$$

0 est racine de $A - BQ$, il existe donc $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A - BQ = XR$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour n . On a donc $A = BQ + X^{n+1}R$ où $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(Q) \leq n$. Écrivons

$$R = (R - R(0)B) + R(0)B$$

de sorte que

$$A = B(Q + X^{n+1}R(0)) + X^{n+1}(R - R(0)B)$$

Le polynôme $R - R(0)B$ s'annule en 0. Il existe donc $R' \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$R - R(0)B = XR'$$

De là, en posant $Q' = Q + X^{n+1}R(0)$,

$$A = BQ' + X^{n+2}R'$$

Il reste à remarquer que

$$\deg(Q') \leq \max(\deg(Q), \deg(X^{n+1}R(0))) \leq n + 1$$

Supposons pour terminer $B(0)$ non nul quelconque. Appliquons ce qui précède au polynôme $\frac{1}{B(0)}B$. Il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$A = \frac{1}{B(0)}BQ + X^{n+1}R$$

et $\deg(Q) \leq n$, d'où le résultat en posant $Q' = \frac{1}{B(0)}Q$. $\square$