

L'équation de degré 3

Marc Lorenzi

24 juillet 2026

Résumé

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre une équation algébrique de degré 3. Nous allons nous intéresser à la *méthode de Viète*, qui fait appel à la trigonométrie, et à la *méthode de Cardan*, fondée sur des extractions de racines carrées et cubiques.

1 Introduction

1.1 Forme canonique d'un polynôme de degré 3

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Considérons le polynôme de degré 3

$$P = X^3 + aX^2 + bX + c$$

Soit $x \in \mathbb{C}$. En reconnaissant un début de cube dans l'expression de $P(x)$, on peut éliminer le terme en x^2 . Pour cela, posons $y = x + a/3$. On a alors

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= \left(y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27}\right) + a\left(y^2 - \frac{2a}{3}y + \frac{a^2}{9}\right) \\ &\quad + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) \\ &= y^3 + py + q \end{aligned}$$

où $p, q \in \mathbb{C}$. Posons

$$Q = X^3 + pX + q$$

Le polynôme Q n'a pas de terme de degré 2 et $P(x) = Q(y)$. On peut donc, par une simple translation de la variable, ramener la recherche des racines de P à celle des racines d'un polynôme de degré 3 qui n'a pas de terme en X^2 . Dans la suite, nous poserons

$$P = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$$

où $p, q \in \mathbb{C}$. Nous allons nous intéresser aux racines de P .

1.2 Discriminant

À quelle condition le polynôme P a-t-il des racines multiples ? Rappelons que $x \in \mathbb{C}$ est racine multiple de P si et seulement si $P(x) = P'(x) = 0$.

Supposons pour commencer que $p \neq 0$.

On a $P' = 3X^2 + p$. Notons r une racine carrée de $-p/3$. Les racines de P' sont εr où $\varepsilon = \pm 1$. On a

$$P(\varepsilon r) = \varepsilon r^3 + p\varepsilon r + q = \varepsilon r(r^2 + p) + q = \varepsilon \frac{2p}{3}r + q$$

On a $P(\varepsilon r) = 0$ si et seulement si

$$r = \varepsilon \frac{-3q}{2p}$$

ou encore

$$r^2 = \frac{9q^2}{4p^2}$$

Comme $r^2 = -p/3$, cette condition est équivalente à

$$-\frac{p}{3} = \frac{9q^2}{4p^2}$$

ou encore

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

Nous verrons apparaître la quantité $4p^3 + 27q^2$ tout au long de l'article. Cela mérite une définition.

Définition 1. Le *discriminant* de P est

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Nous venons de montrer que si $p \neq 0$, le polynôme P a une racine multiple si et seulement si $\Delta = 0$. Remarquons que $P'' = 6X$. Si P a une racine multiple x , l'ordre de multiplicité de cette racine est égal à 2. En effet si $P''(x) = 0$, alors $x = 0$, donc $q = 0$. Mais comme $\Delta = 0$, il vient aussi $p = 0$. Contradiction.

Creusons un peu le cas $\Delta = 0$. P a donc une racine double qui est r où $r^2 = -p/3$. On a

$$0 = P(r) = r^3 + pr + q = r(r^2 + p) + q = \frac{2p}{3}r + q$$

Ainsi,

$$r = -\frac{3q}{2p}$$

Le polynôme P possède une autre racine. Appelons-la x . Que vaut x ? Par les relations coefficients-racines, la somme des racines de P est

$$2r + x = 0$$

Ainsi,

$$x = \frac{3q}{p}$$

Si $\Delta = 0$ et $p \neq 0$, les racines de P sont la racine double $-3q/2p$ et la racine simple $3q/p$.

Exemple. Prenons $P = X^3 - 3X + 2$, c'est à dire $p = -3$ et $q = 2$. On a $r = 1$ et $x = -2$. Effectivement,

$$P = (X - 1)^2(X + 2)$$

Supposons maintenant $p = 0$, c'est à dire $P = X^3 + q$. On a $\Delta = 27q^2$. Les racines de P sont les racines cubiques de $-q$. Le polynôme P a donc une racine multiple si et seulement si $q = 0$, auquel cas P a une racine triple. Remarquons que c'est le cas si et seulement si $\Delta = 0$.

Résumons-nous.

- Si $\Delta \neq 0$, alors P a trois racines simples.
- Si $p \neq 0$ et $\Delta = 0$, alors P a une racine double et une racine simple.
- Si $p = 0$ et $\Delta = 0$, alors $P = X^3$ a une racine triple (qui est 0).

2 Le cas p, q réels : une étude qualitative

2.1 Introduction

Nous supposons ici que $P = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$. Notons toujours $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

Intéressons-nous au nombre de racines réelles de P et à leur ordre de multiplicité. Nous donnerons des valeurs explicites des racines dans la section suivante. On a $P' = 3X^2 + p$, la discussion va clairement se faire sur le signe et la nullité de p .

2.2 Le cas $p > 0$

Supposons $p > 0$. On a alors $P' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Le polynôme P est strictement croissant sur $\mathbb{R}$, il s'annule donc au plus une fois. De plus, lorsque x tend vers $-\infty$, $P(x)$ tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$, $P(x)$ tend vers $+\infty$. Comme P est continu sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Ainsi, P s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$. En notant x_0 l'unique racine réelle de P , on a de plus $P'(x_0) > 0$, donc $P'(x_0) \neq 0$. Ainsi, x_0 est une racine simple de P .

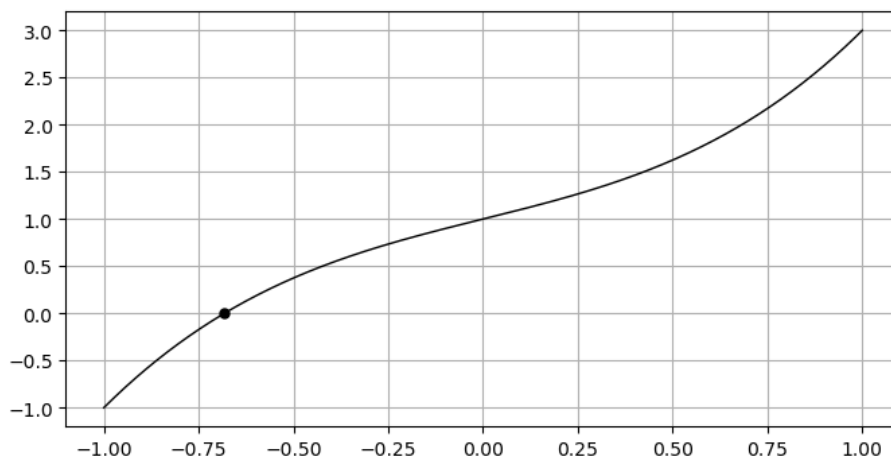


FIGURE 1 – Le polynôme $X^3 + X + 1$.

2.3 Le cas $p = 0$

Supposons $p = 0$. On a $P = X^3 + q$. Ce cas est immédiat, le polynôme P a une unique racine réelle, qui est $x_0 = -\sqrt[3]{q}$. Si $q \neq 0$, alors x_0 est racine simple. Enfin, si $q = 0$ alors $P = X^3$ et $x_0 = 0$ est racine triple de P .

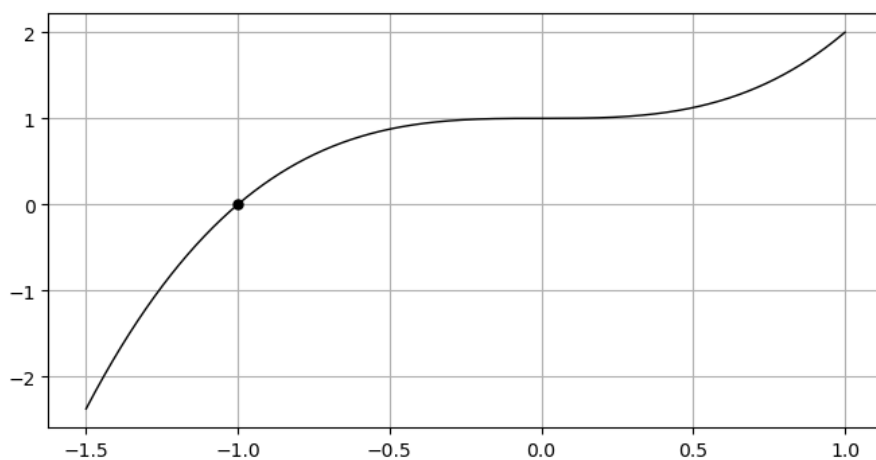


FIGURE 2 – Le polynôme $X^3 + 1$.

2.4 Le cas $p < 0$

Supposons $p < 0$. Ce cas est le plus intéressant. En posant $\alpha = \sqrt{-p/3}$, on a

$$P' = 3X^2 + p = 3(X - \alpha)(X + \alpha)$$

Le polynôme P croît strictement sur $] -\infty, \alpha]$, décroît strictement sur $[-\alpha, \alpha]$ et enfin croît strictement sur $[\alpha, +\infty[$. De plus, les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et

$+\infty$. Le nombre de racines réelles de P et leur ordre de multiplicité sont donc directement reliés au signe de $P(\pm\alpha)$. Soit $\varepsilon = \pm 1$. On a

$$\begin{aligned} P(\varepsilon\alpha) &= \varepsilon^3\alpha^3 + p\varepsilon\alpha + q \\ &= \varepsilon\alpha(\alpha^2 + p) + q \\ &= \varepsilon\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} P(-\alpha)P(\alpha) &= \left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \\ &= q^2 + \frac{4p^3}{27} \\ &= \frac{\Delta}{27} \end{aligned}$$

Trois cas sont à considérer.

- Cas 1, $\Delta > 0$. Les deux réels $P(-\alpha)$ et $P(\alpha)$ sont de même signe. Par exemple, pour fixer les idées, ils sont strictement positifs. Le polynôme P croît strictement sur $] -\infty, -\alpha]$. Il tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et est strictement positif en $-\alpha$. Il existe donc une unique racine réelle de P sur $] -\infty, -\alpha[$. Les variations de P montrent ensuite que pour tout $x \in [-\alpha, +\infty[$, $P(x) \geq P(\alpha) > 0$. Ainsi, P n'a aucune racine sur $[-\alpha, +\infty[$.

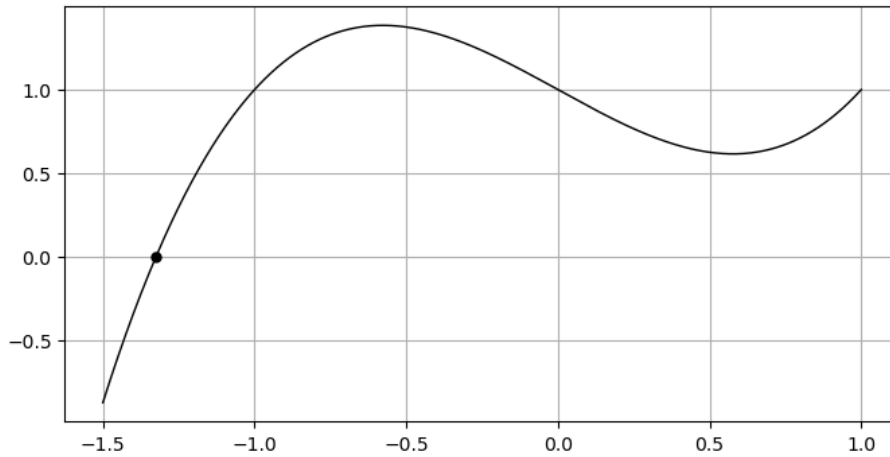


FIGURE 3 – Le polynôme $X^3 - X + 1$. On a $\Delta = 23$.

- Cas 2, $\Delta = 0$. On a donc $P(-\alpha) = 0$ ou $P(\alpha) = 0$ (car $p \neq 0$). Pour fixer les idées, $P(\alpha) = 0$. Par les variations de P , on a $P(-\alpha) > 0$. Une étude analogue à celle du cas 1 montre que P a une unique racine réelle x_0 (nécessairement simple car P' ne s'annule qu'en $\pm\alpha$) sur $] -\infty, -\alpha[$ et, de plus, $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$, donc α est racine double de P . Ainsi, P est scindé sur $\mathbb{R}$:

$$P = (X - x_0)(X - \alpha)^2$$

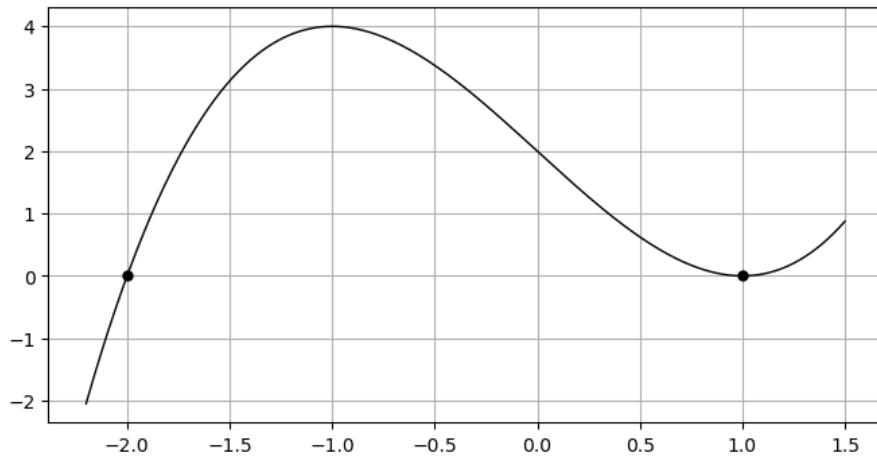


FIGURE 4 – Le polynôme $X^3 - 3X + 2$ a une racine simple qui est -2 et une racine double égale à 1 .

- Cas 3, $\Delta < 0$. Les réels $P(-\alpha)$ et $P(\alpha)$ sont donc non nuls et de signe opposé. Comme P décroît strictement sur $[-\alpha, \alpha]$, on a donc $P(-\alpha) > 0$ et $P(\alpha) < 0$. Une étude analogue à celle du cas 1 montre que P est scindé sur $\mathbb{R}$. De plus, ses racines sont simples et appartiennent aux intervalles $] -\infty, -\alpha[$, $] -\alpha, \alpha[$ et $] \alpha, +\infty[$.

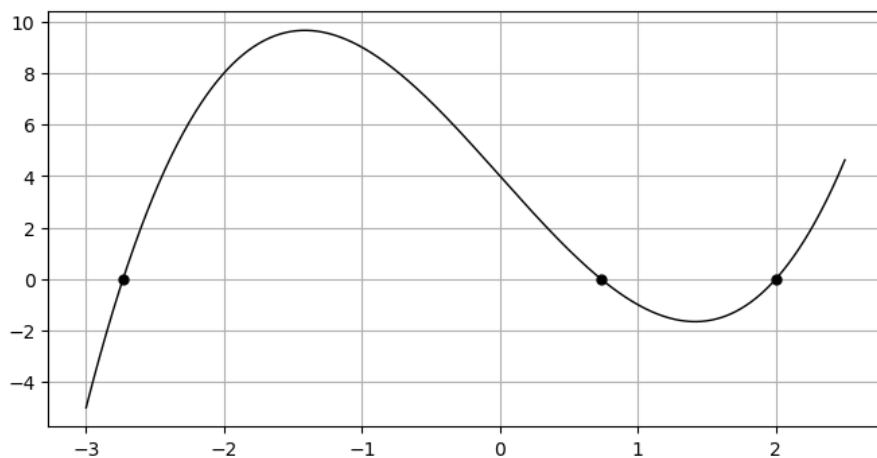


FIGURE 5 – Le polynôme $X^3 - 6X + 4$. On a $\Delta = -432$.

2.5 Bilan

La clé de la discussion est en fin de compte $\Delta = 4p^3 + 27q^2$, le discriminant de P .

- Si $\Delta < 0$, alors nécessairement $p < 0$. Le polynôme P a trois racines réelles simples.
- Si $\Delta = 0$, il y a deux possibilités. Première possibilité, $q = p = 0$. Dans ce cas, P a une racine triple (qui est 0). Deuxième possibilité, $q \neq 0$ et alors, comme $q^2 > 0$, $p < 0$. Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$, il a une racine double et une racine simple.

- Si $\Delta > 0$, l'étude qui précède montre que P a une unique racine réelle et cette racine est simple. Classiquement, les deux autres racines de P sont non réelles et conjuguées.

La figure ci-dessous montre le signe du discriminant $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ en fonction des réels p et q .

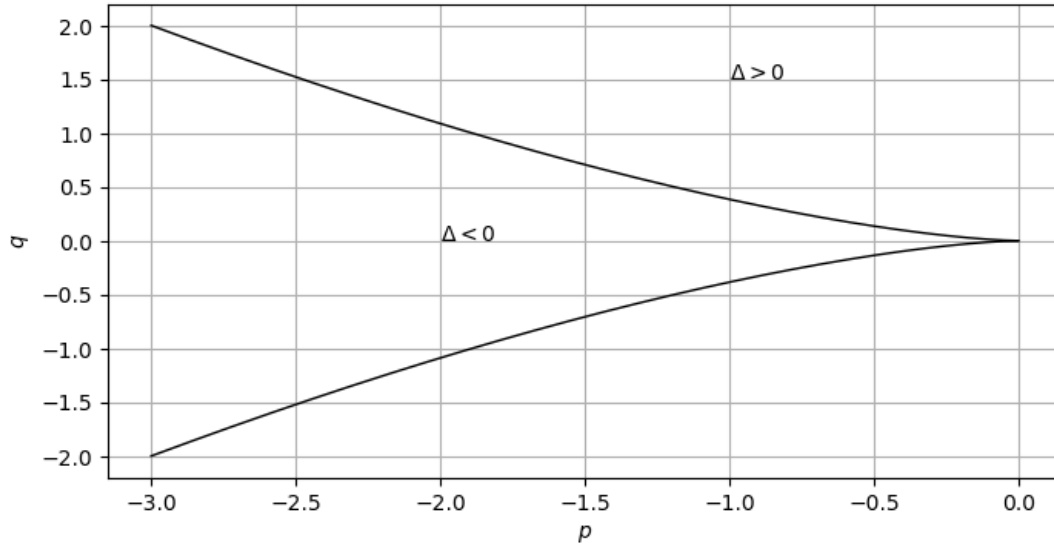


FIGURE 6 – Les signe du discriminant en fonction de p et q . La courbe est l'ensemble des couples (p, q) tels que $\Delta = 0$.

3 Le cas p, q réels : la méthode de Viète

Dans cette section nous supposons $P = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$ et $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$. Nous nous plaçons donc dans le cas où P possède trois racines réelles simples. Remarquons que l'on a $p < 0$. Nous allons voir qu'un changement de variable trigonométrique permet de calculer ces racines. Il s'agit de la *méthode de Viète*.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $x = \lambda y$ où $\lambda > 0$. On a alors

$$x^3 + px = \lambda^3 y^3 + p\lambda y$$

Peut-on choisir λ de sorte que $\lambda^3 = 4\mu$ et $p\lambda = -3\mu$, où $\mu \in \mathbb{R}^*$? Si le réel λ vérifie ces conditions alors, en faisant le quotient des deux égalités,

$$\frac{\lambda^2}{p} = -\frac{4}{3}$$

et donc, puisque $\lambda > 0$,

$$\lambda = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$$

Inversement, prenons cette valeur pour λ . Posons

$$\mu = -\frac{p}{3} \sqrt{-\frac{4p}{3}}$$

On a alors

$$\lambda^3 = -\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}} = 4\mu \quad \text{et} \quad p\lambda = -3\mu$$

donc λ vérifie les conditions. Prenons dorénavant cette valeur pour λ . On a

$$P(x) = x^3 + px + q = \mu(4y^3 - 3y) + q$$

J'affirme que si x est racine de P , alors $y \in]-1, 1[$. En effet, on a dans ce cas

$$t = 4y^3 - 3y = -\frac{q}{\mu} = \frac{3q}{p}\sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

De là,

$$t^2 = \frac{27q^2}{-4p^3}$$

Or, $4p^3 + 27q^2 < 0$, donc $t^2 < 1$, d'où $t \in]-1, 1[$. Posons $\varphi(y) = 4y^3 - 3y$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(y) = 3(4y^2 - 1)$$

La fonction φ croît strictement sur $] -\infty, -1/2]$, décroît strictement sur $[-1/2, 1/2]$, puis croît strictement sur $[1/2, +\infty[$. De plus, $\varphi(-1) = -1$ et $\varphi(1) = 1$. On en déduit que pour tout $y \notin]-1, 1[$, $\varphi(y) \geq 1$ ou $\varphi(y) \leq -1$.

Nous pouvons donc poser $y = \cos \theta$, où $\theta \in]0, \pi[$. On a alors

$$P(x) = \mu(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + q = \mu \cos 3\theta + q$$

De là, $P(x) = 0$ si et seulement si

$$\cos 3\theta = -\frac{q}{\mu} = \frac{3q}{p}\sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

ou encore

$$\theta = \varepsilon \frac{1}{3} \arccos \frac{3q}{p}\sqrt{\frac{-3}{4p}} + \frac{2k\pi}{3}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Seule la valeur de $\cos \theta$ nous intéresse. Comme $\cos$ est paire, on peut prendre $\varepsilon = 1$. De plus, il suffit de prendre pour k trois entiers successifs, par exemple $-1, 0$ et 1 . Nous avons donc trouvé les racines de P . Résumons-nous.

On suppose $\Delta < 0$ et $p < 0$. En posant

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \arccos \frac{3q}{p}\sqrt{\frac{-3}{4p}},$$

les racines de P sont

$$\sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos \left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3} \right), \quad \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos \theta_0, \quad \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Exemple. Prenons $P = X^3 - 6X + 4$, c'est à dire $p = -6$ et $q = 4$. On a $\Delta = -432 < 0$. Avec les notations ci-dessus,

$$\theta_0 = \frac{1}{3} \arccos -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Les racines de P sont donc

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1$$

$$2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2$$

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} = -\sqrt{3} - 1$$

Dans cet exemple pas du tout choisi au hasard, nous avons de la chance : nous avons une valeur simple pour θ_0 . C'est très rarement le cas, on obtient la plupart du temps une expression des racines de P sous une forme qui n'est pas simple du tout.

4 Le cas p, q réels : discriminant positif

La méthode de Viète ne fonctionne que lorsque le discriminant Δ de P est strictement négatif. Comment adapter cette méthode dans les autres cas ? Lorsque $\Delta = 0$, nous avons déjà calculé les racines de P . Supposons que $\Delta > 0$. Le polynôme P possède une unique racine réelle et celle-ci est simple. Il va nous falloir discuter sur le signe de p . Le cas $p = 0$ est évident, supposons donc $p \neq 0$.

4.1 Le cas $p < 0$

Supposons $p < 0$. Reprenons

$$\lambda = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$$

et

$$\mu = -\frac{p}{3} \sqrt{-\frac{4p}{3}}$$

Soit x l'unique racine réelle de P . Posons $x = \lambda y$. En reprenant les calculs faits pour la méthode de Viète, on a cette fois $y < -1$. Posons $y = -\operatorname{ch} \theta$ où $\theta > 0$. On a

$$P(x) = -\mu(4\operatorname{ch}^3 \theta - 3\operatorname{ch} \theta) + q = -\mu \operatorname{ch} 3\theta + q$$

De là, $P(x) = 0$ si et seulement si

$$\operatorname{ch} 3\theta = \frac{q}{\mu} = \frac{-3q}{p} \sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

ou encore

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{Argch} \frac{-3q}{p} \sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

Nous avons donc le résultat suivant.

On suppose $\Delta > 0$ et $p < 0$. En posant

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{Argch} \frac{-3q}{p} \sqrt{\frac{-3}{4p}}$$

l'unique racine réelle de P est

$$-\sqrt{-\frac{4p}{3}} \operatorname{ch} \theta$$

Exemple. Prenons $P = X^3 - X + 1$, c'est à dire $p = -1$ et $q = 1$. On a $p < 0$ et $\Delta = 23 > 0$. On a

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{Argch} \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \ln \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{23}}{2}$$

L'unique racine réelle de P est

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} (e^\theta + e^{-\theta}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{23}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3} + \sqrt{23}}} \right)$$

4.2 Le cas $p > 0$

Supposons $p > 0$. Posons

$$\lambda = \sqrt{\frac{4p}{3}}$$

Soit x l'unique racine de P . Posons $x = \lambda y$. On a

$$P(x) = x^3 + px + q = \lambda^3 y^3 + p\lambda y + q = \frac{4p}{3} \lambda y^3 + p\lambda y + q = \frac{p}{3} \lambda (4y^3 + 3y) + q$$

Posons cette fois $y = \operatorname{sh} \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\frac{p}{3} \lambda (4y^3 + 3y) + q = \frac{p}{3} \operatorname{sh} 3\theta + q$$

Ainsi,

$$\operatorname{sh} 3\theta = -\frac{3q}{\lambda p} = -\frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{4p}}$$

d'où

$$\theta = -\frac{1}{3} \operatorname{Argsh} \frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{4p}}$$

Résumons.

On suppose $\Delta > 0$ et $p > 0$. En posant

$$\theta = -\frac{1}{3} \operatorname{Argsh} \frac{3q}{p} \sqrt{\frac{3}{4p}},$$

l'unique racine réelle de P est

$$\sqrt{\frac{4p}{3}} \operatorname{sh} \theta$$

Exemple. Prenons $P = X^3 + X + 1$, c'est à dire $p = 1$ et $q = 1$. On a $p > 0$ et $\Delta = 31 > 0$. On a

$$\theta = -\frac{1}{3} \operatorname{Argsh} \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{3} \ln \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{31}}{2}$$

L'unique racine réelle de P est

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (e^\theta - e^{-\theta}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{31}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3} + \sqrt{31}}} \right)$$

5 La méthode de Cardan

5.1 Introduction

Nous prenons dans cette section $p, q \in \mathbb{C}$. La *méthode de Cardan* permet d'obtenir les trois racines du polynôme P . L'expression des racines fait intervenir des racines carrées et des racines cubiques de nombres complexes.

Pour simplifier l'étude, nous supposerons p non nul. Nous reviendrons au cas $p = 0$ à la fin de la discussion.

5.2 Un système

Soit $x \in \mathbb{C}$. Considérons le système

$$(S_x) \begin{cases} u + v &= x \\ uv &= -p/3 \end{cases}$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Le couple (u, v) est solution de (S_x) si et seulement si u et v sont les racines du polynôme de degré 2

$$Q = X^2 - xX - \frac{p}{3}$$

Le discriminant de Q est $x^2 + 4p/3$. Si ce discriminant est nul, (S_x) a une unique solution qui est (x, x) . Sinon, (S_x) a deux solutions distinctes. Si (u, v) est l'une des solutions, l'autre est (v, u) .

5.3 Un changement de variable

Soit $x \in \mathbb{C}$. Soit (u, v) une solution de (S_x) . On a

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + px + q \\ &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q \\ &= u^3 + (u + v)(3uv + p) + q \\ &= u^3 + v^3 + q \end{aligned}$$

Comme $uv = -p/3$, on a aussi

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Ainsi, x est racine de P si et seulement si

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

c'est à dire lorsque u^3 et v^3 sont racines du polynôme de degré 2

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta' = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{1}{27}(4p^3 + 27q^2) = \frac{\Delta}{27}$$

où Δ est le discriminant de P . Appelons δ une racine de Δ' . On obtient alors

$$u^3, v^3 = \frac{-q \pm \delta}{2}$$

Le choix de u^3 et v^3 importe peu puisque seule la somme nous intéresse. Prenons par exemple

$$u^3 = \frac{-q + \delta}{2}$$

Comme $p \neq 0$, on a $\delta \neq q$. De là, Il existe trois nombres complexes u qui vérifient cette égalité. Appelons u_0 l'un de ces trois nombres. Les deux autres sont ju_0 et $j^2 u_0$, où j est une racine cubique non réelle de 1. Connaissant u , on en déduit $v = -p/(3u)$. Notons $v_0 = -p/(3u_0)$. En remarquant que $1/j = j^2$ et $1/j^2 = j$, les racines de P sont donc

$$u_0 + v_0, \quad ju_0 + j^2 v_0, \quad j^2 u_0 + jv_0$$

5.4 Une écriture explicite

Les racines de P sont souvent données dans la littérature avec des symboles de racine carrée et de racine cubique. Alors, faisons-le aussi. Écrivons

$$\Delta' = 4 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

Un peu abusivement, notons

$$\delta = 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

De là,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

et donc, toujours abusivement,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Jusqu'ici, tout va bien. Nous avons juste écrit des symboles de racine pour désigner *une* racine carrée ou *une* racine cubique d'un nombre complexe. Ensuite, on est tenté d'écrire

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Le problème est que v n'est pas n'importe quelle racine cubique du nombre sous la racine, parce que $uv = -p/3$. Il faut donc garder à l'esprit que, une fois choisi u , le complexe v est l'unique racine cubique telle que $uv = -p/3$. Avec cette convention, les racines de P sont les trois nombres complexes

$$u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

où v est choisi de façon unique à partir de u par la condition $3uv + p = 0$. Une fois choisie une racine cubique u_0 et le v_0 associé, les trois possibilités sont (u_0, v_0) , (ju_0, j^2v_0) et (j^2u_0, jv_0) .

5.5 Un exemple

Reprenons le premier des exemples que nous avons examinés avec la méthode de Viète. Le lecteur courageux regardera les deux autres en exercice.

Prenons $P = X^3 - 6X + 4$, c'est à dire $p = -6, q = 4$. On a

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -4$$

De là,

$$u_0^3 = -2 + 2i$$

Il s'agit maintenant de trouver une racine cubique de $-2 + 2i$. On vient de comprendre que la méthode de Cardan ne « résout » qu'en apparence l'équation de degré 3 : pour trouver une racine cubique d'un nombre complexe il faut, sauf coup de chance, déterminer un argument de celui-ci. Et donc passer par la trigonométrie, bref revenir à la méthode de Viète !

Comme notre exemple est subtilement choisi, la racine cubique est simple :

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} = (1 + i)^3$$

On peut donc prendre

$$u_0 = 1 + i$$

et donc

$$v_0 = \frac{-p}{3u_0} = 1 - i$$

De là, les racines de P sont

$$\begin{aligned} u_0 + v_0 &= 2 \\ ju_0 + j^2v_0 &= -\sqrt{3} - 1 \\ j^2u_0 + jv_0 &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

5.6 Le cas $p = 0$

Les formules de Cardan restent-elles valables si $p = 0$? Les racines de P sont les racines cubiques de $-q$. Dans ce cas, le système (S_x) devient

$$(S_x) \quad \begin{cases} u + v &= x \\ uv &= 0 \end{cases}$$

En reprenant les calculs faits plus haut, le nombre complexe x est racine de P si et seulement si

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= 0 \end{aligned}$$

C'est à dire si u^3 et v^3 sont les racines du polynôme $X^2 + qX$. Les racines de ce polynôme sont 0 et $-q$. On a donc par exemple $u = \sqrt[3]{-q}$ et $v = 0$, d'où $x = u + v = \sqrt[3]{-q}$. On obtient effectivement ces valeurs avec les formules de Cardan.

6 Quelques remarques sur le discriminant

Le discriminant a joué un rôle essentiel dans toutes les discussions qui précèdent. Est-il possible de définir le discriminant d'un polynôme *quelconque*? Dans ce qui suit, nous n'allons qu'effleurer le sujet. Entrer dans les détails demanderait un article à part entière.

6.1 Un polynôme symétrique

Soit $n \geq 1$. Considérons le polynôme à n indéterminées

$$\Delta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i \neq j} (X_j - X_i)$$

Proposition 1. Δ est un polynôme symétrique.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a

$$\Delta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{i \neq j} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}) = \prod_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)})$$

Posons, dans le produit sur j , $k = \sigma(j)$. Lorsque j décrit $\llbracket 1, n \rrbracket$, $k = \sigma(j)$ décrit aussi $\llbracket 1, n \rrbracket$ et donc

$$\Delta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{k=1}^n \prod_{i \neq \sigma^{-1}(k)} (X_k - X_{\sigma(i)})$$

Posons maintenant $\ell = \sigma(i)$ dans le second produit. Il vient

$$\Delta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{k=1}^n \prod_{\sigma^{-1}(\ell) \neq \sigma^{-1}(k)} (X_k - X_{\ell})$$

Il reste à remarquer que $\sigma^{-1}(\ell) \neq \sigma^{-1}(k)$ si et seulement si $\ell \neq k$. On a donc finalement

$$\Delta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{k=1}^n \prod_{\ell \neq k} (X_k - X_\ell) = \Delta(X_1, \dots, X_n)$$

□

On peut donner une autre écriture de Δ . Pour cela, écrivons

$$\Delta = \prod_{i < j} (X_j - X_i) \prod_{i > j} (X_j - X_i)$$

Chacun des produits possède $n(n-1)/2$ facteurs. Le second produit est donc

$$\prod_{i > j} (X_j - X_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i > j} (X_i - X_j)$$

Le changement d'indice $(i, j) \leftarrow (j, i)$ donne

$$\prod_{i > j} (X_i - X_j) = \prod_{j > i} (X_j - X_i)$$

c'est à dire le premier produit. Ainsi,

Proposition 2.

$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i < j} (X_j - X_i)^2$$

6.2 Le discriminant d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \geq 1$. Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$. Appelons $x_1, \dots, x_n$ les racines de P , comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Définition 2. Le *discriminant* de P est

$$\Delta(P) = \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

Comme le polynôme Δ est symétrique, la définition ci-dessus ne dépend effectivement que de P , et pas de la façon dont on a énuméré les racines de P .

Proposition 3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Le polynôme P a une racine multiple si et seulement si $\Delta(P) = 0$.

Démonstration. Soit $n = \deg P$. On a $\Delta(P) = 0$ si et seulement si il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, d'où le résultat. □

Nous allons pour terminer regarder deux cas particulier, ceux des polynômes de degré 2 et de degré 3. Nous allons retrouver à peu près les valeurs « usuelles » du discriminant.

6.3 Les polynômes de degré 2

Prenons $P = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Soit $\Delta_0 = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ_0 . Les racines de P sont

$$x_1 = \frac{-b - \delta}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \delta}{2}$$

On a $x_2 - x_1 = \delta$. De là, par la proposition 2,

$$\Delta(P) = -(x_2 - x_1)^2 = -\delta^2 = -\Delta_0$$

Au signe près, le discriminant de P est ... le discriminant de P .

6.4 Les polynômes de degré 3

Prenons maintenant pour P un polynôme « réduit » de degré 3, c'est à dire

$$P = X^3 + pX + q$$

où $p, q \in \mathbb{C}$. En reprenant les notations des formules de Cardan,

$$x_1 = u_0 + v_0, \quad x_2 = ju_0 + j^2v_0, \quad x_3 = j^2u_0 + jv_0$$

C'est parti pour un petit calcul. On a

$$\Delta(P) = -(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2(x_3 - x_1)^2$$

Calculons chacune des différences.

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (j - 1)u_0 + (j^2 - 1)v_0 = (j - 1)(u_0 + (j + 1)v_0) = (j - 1)(u_0 - j^2v_0) \\ x_3 - x_1 &= (j^2 - 1)u_0 + (j - 1)v_0 = (j - 1)((j + 1)u_0 + v_0) = (j - 1)(-j^2u_0 + v_0) \\ x_3 - x_2 &= (j^2 - j)u_0 + (j - j^2)v_0 = j(j - 1)(u_0 - v_0) \end{aligned}$$

Le produit de ces trois nombres est ainsi

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = j(j - 1)^3(u_0 - j^2v_0)(-j^2u_0 + v_0)(u_0 - v_0)$$

Tout d'abord,

$$j(j - 1)^3 = j(j^3 - 3j^2 + 3j - 1) = 3j^2(1 - j)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (u_0 - j^2v_0)(-j^2u_0 + v_0) &= -j^2u_0^2 + (1 + j^4)u_0v_0 - j^2v_0^2 \\ &= -j^2(u_0^2 + u_0v_0 + v_0^2) \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} (u_0 - j^2v_0)(-j^2u_0 + v_0)(u_0 - v_0) &= -j^2(u_0^2 + u_0v_0 + v_0^2)(u_0 - v_0) \\ &= -j^2(u_0^3 - v_0^3) \\ &= -j^2 \left(\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right) - \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right) \right) \\ &= -2j^2 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{aligned}$$

Nous y sommes, il reste à élever au carré.

$$\Delta(P) = -3j^4(1-j)^2 4j^4 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

Remarquons que

$$3j^4(1-j)^2 4j^4 = 12j^8(1-2j+j^2) = 12j^2(-3j) = -36$$

pour obtenir finalement

$$\Delta(P) = 36 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = \frac{1}{3}(4p^3 + 27q^2)$$

À une constante multiplicative près, nous retrouvons effectivement ce que nous avons appelé le discriminant de P .

6.5 Comment calculer le discriminant d'un polynôme quelconque ?

Nous avons eu beaucoup de chance avec les polynômes de degrés 2 et 3. Nous avons pu calculer leur discriminant parce que nous connaissions leurs racines. Rappelons-nous le résultat de la proposition 1. Le polynôme $\Delta(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme symétrique. Un résultat très général nous dit que tout polynôme symétrique est une polynôme en les *polynômes symétriques élémentaires*.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$. Notons

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

où les a_k sont des nombres complexes et $a_n \neq 0$. Soient $x_1, \dots, x_n$ les racines de P comptées avec leurs ordres de multiplicité. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En notant $\sigma_k(X_1, \dots, X_n)$ le k^e polynôme symétrique élémentaire, on a

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

En combinant le tout, nous obtenons que $\Delta(P)$ est un polynôme en les coefficients de P , divisé par une puissance de a_n . Mais quel polynôme ? La clé est la notion de *résultant* de deux polynômes. Nous n'en dirons pas plus ici. Contentons-nous d'un exercice.

Exercice. Soient $p, q \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Coïncidence ? Absolument pas. J'ai parlé un peu plus haut du résultant de deux polynômes. Ce déterminant est le résultant de $P = X^3 + pX + q$ et de $P' = 3X^2 + 1$.