

La formule de Faulhaber

Marc Lorenzi

28 septembre 2026

1 Sommes de puissances

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, posons

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$$

Les valeurs de $S_p(n)$ pour les premières valeurs de n sont bien connues : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_0(n) &= n + 1 \\ S_1(n) &= \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_2(n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ S_3(n) &= \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$

On remarque sur ces premières valeurs que $S_p(n)$ est un « polynôme en n » de degré $p+1$. Le coefficient dominant est $1/(p+1)$, les autres coefficients sont en revanche assez mystérieux. Nous allons dans cet article donner une formule explicite pour $S_p(n)$. Les coefficients de $S_p(n)$ vont s'exprimer à l'aide de nombres appelés les *nombres de Bernoulli*. La formule que nous allons montrer s'appelle la *formule de Faulhaber*.

2 Polynômes et nombres de Bernoulli

2.1 Définitions

Il existe de nombreuses façons de définir les polynômes de Bernoulli. J'ai choisi la plus élémentaire.

Définition 1. On définit par récurrence la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des *polynômes de Bernoulli* par

- $B_0 = 1$.
- Pour tout $n \geq 1$, B_n est l'unique polynôme vérifiant

$$(\star) \ B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad (\star\star) \ \int_0^1 B_n = 0$$

Définit-on bien de la sorte une suite de polynômes ? Supposons que B_{n-1} est bien défini et qu'il est un polynôme. Il existe bien un unique polynôme B_n vérifiant $(\star)$ et $(\star\star)$. En effet, soit P_n la primitive de B_{n-1} qui s'annule en 0. La condition $(\star)$ est réalisée si et seulement si $B_n = nP_n + c$ où $c \in \mathbb{R}$. En tant que primitive d'un polynôme, P_n est aussi un polynôme. La condition $(\star\star)$ est alors réalisée si et seulement si

$$c = -n \int_0^1 P_n$$

d'où l'existence et l'unicité du polynôme B_n . On montre facilement par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg B_n = n$.

Ces quelques commentaires permettent de calculer les polynômes de Bernoulli. Par exemple, comme $B_0 = 1$, on a

$$B_1 = P_1 + c = X + c$$

où

$$c = - \int_0^1 P_1 = - \int_0^1 x \, dx = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

Ayant obtenu B_1 , on en déduit en intégrant

$$B_2 = 2P_2 + c = X^2 - X + c$$

De là,

$$c = - \int_0^1 2P_2 = - \int_0^1 (x^2 - x) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ainsi,

$$B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

Essayons encore une fois. Une nouvelle intégration donne

$$B_3 = 3P_3 + c = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + c$$

où

$$c = - \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) \, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

Ainsi,

$$B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

Cette méthode pour calculer B_n n'est pas très pratique, nous ferons mieux plus loin.

n	X^{12}	X^{11}	X^{10}	X^9	X^8	X^7	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X	1
0													1
1												1	$-1/2$
2											1	-1	$1/6$
3										1	$-3/2$	$1/2$	0
4									1	-2	1	0	$-1/30$
5								1	$-5/2$	$5/3$	0	$-1/6$	0
6							1	-3	$5/2$	0	$-1/2$	0	$1/42$
7						1	$-7/2$	$7/2$	0	$-7/6$	0	$1/6$	0
8					1	-4	$14/3$	0	$-7/3$	0	$2/3$	0	$-1/30$
9				1	$-9/2$	6	0	$-21/5$	0	2	0	$-3/10$	0
10			1	-5	$15/2$	0	-7	0	5	0	$-3/2$	0	$5/66$
11		1	$-11/2$	$55/6$	0	-11	0	11	0	$-11/2$	0	$5/6$	0
12	1	-6	11	0	$-33/2$	0	22	0	$-33/2$	0	5	0	$-691/2730$

FIGURE 1 – Les coefficients des polynômes de Bernoulli

Définissons maintenant les nombres de Bernoulli.

Définition 2. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des *nombres de Bernoulli* est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$b_n = B_n(0)$$

Les nombres de Bernoulli sont donc les nombres qui apparaissent dans la dernière colonne du tableau de la figure 1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$	0	$-691/2730$

FIGURE 2 – Les nombres de Bernoulli

On remarque évidemment des choses intéressantes sur ces valeurs (les zéros, les signes alternés) mais les montrer nous éloignerait de notre sujet, c'est à dire les sommes $S_p(n)$.

2.2 Une expression des polynômes de Bernoulli

Il est possible d'obtenir explicitement les coefficients des B_n en fonction des nombres de Bernoulli. Commençons par une évidence.

Lemme 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur k . L'égalité est immédiate pour

$k = 0$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons

$$B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$$

En dérivant et en utilisant $(\star)$, il vient

$$B_n^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) B_{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} B_{n-k-1}$$

□

Proposition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\deg B_n = n$. La formule de Taylor appliquée à B_n donne donc

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n B_n^{(k)}(0) \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(0) \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} b_{n-k} X^k$$

Le changement d'indice $k' = n - k$ donne le résultat. □

2.3 Une relation fonctionnelle

Voici encore une évidence.

Lemme 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ différent de 1, $B_n(1) = B_n(0)$.

Démonstration. On a $B_0(1) = B_0(0) = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n = n \int_0^1 B_{n-1} = 0$$

□

Remarque. Le résultat est faux pour $n = 1$. En effet, $B_1(1) = 1/2$ alors que $B_1(0) = -1/2$.

La proposition qui suit sera la clé du calcul des sommes $S_p(n)$.

Proposition 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la formule de Taylor appliquée au polynôme $B_n(X+1)$ qui est de degré n ,

$$B_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(1)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} B_{n-k}(1) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_{n-k}(1) X^k$$

Posons $k' = n - k$ pour obtenir

$$B_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(1) X^{n-k}$$

Si $k \neq 1$, alors $B_k(1) = B_k(0) = b_k$. De plus, $B_1(1) = B_1(0) + 1 = b_1 + 1$. De là,

$$\begin{aligned} B_n(X+1) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k X^{n-k} + nX^{n-1} \\ &= B_n(X) + nX^{n-1} \end{aligned}$$

□

2.4 Une relation de récurrence sur les nombres de Bernoulli

Nous avons donné dans la proposition 2 l'expression du polynôme B_n en fonction des nombres de Bernoulli. Il s'avère que les b_n vérifient une relation de récurrence intéressante.

Proposition 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Par le lemme 3 et la proposition 2,

$$b_{n+1} = B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k = b_{n+1} + (n+1)b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$$

d'où le résultat. □

Remarque. Sachant que $b_0 = 1$, il est maintenant possible de calculer les b_n sans passer par les polynômes de Bernoulli. En écrivant proprement les choses, on obtient les $n+1$ nombres de Bernoulli $b_0, \dots, b_n$ en $O(n^2)$ opérations arithmétiques.

3 La formule de Faulhaber

Nous y voilà. Rappelons que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$$

Proposition 6. *Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,*

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - b_{p+1})$$

Démonstration. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \sum_{k=0}^n k^p \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^n (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) \quad (\text{proposition 4}) \\ &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)) \quad (\text{télescopage}) \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque $B_{p+1}(0) = b_{p+1}$. $\square$

Nous nous étions fixé pour objectif d'écrire $S_p(n)$ comme un « polynôme en n ». Voici le résultat.

Proposition 7. [FORMULE DE FAULHABER]

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(n) = n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_{p+1-k} n^k$$

Démonstration. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Par la proposition 4,

$$B_{p+1}(n+1) = B_{p+1}(n) + (p+1)n^p$$

De là

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(n) + (p+1)n^p - b_{p+1}) \\ &= n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k} \end{aligned}$$

En posant $k' = p + 1 - k$, on obtient

$$\begin{aligned} S_p(n) &= n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{p+1-k} b_{p+1-k} n^k \\ &= n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_{p+1-k} n^k \end{aligned}$$

□

On trouve souvent cette formule sous une forme légèrement différente. Posons $b_1^+ = b_1 + 1 = 1/2 (= -b_1)$ et pour tout $n \neq 1$, $b_n^+ = b_n$. La formule de Faulhaber devient alors (si $p \neq 0$),

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} b_{p+1-k}^+ n^k$$