

Les idéaux d'un produit d'anneaux

Marc Lorenzi

20 janvier 2023

Proposition 1. Soient A et B deux anneaux. Les idéaux de $A \times B$ sont les ensembles $I \times J$ où I est un idéal de A et J est un idéal de B .

Démonstration. Si I est un idéal de A et J est un idéal de B on vérifie facilement que $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.

Soit K un idéal de $A \times B$. Notons

$$I = \{x \in A : \exists y \in B, (x, y) \in K\}$$

L'ensemble I est la projection de K sur A . Montrons que I est un idéal de A . On a $(0, 0) \in K$ donc $0 \in I$ et ainsi $I \neq \emptyset$. Soient $x, x' \in I$. Soient $y, y' \in B$ tels que $(x, y) \in K$ et $(x', y') \in K$. On a

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \in K$$

donc $x - x' \in I$. Enfin, soient $x \in I$ et $a \in A$. Soit $y \in B$ tel que $(x, y) \in K$. On a

$$(a, 1)(x, y) = (ax, y) \in K$$

et donc $ax \in I$.

Notons aussi

$$J = \{y \in B : \exists x \in A, (x, y) \in K\}$$

L'ensemble J est la projection de K sur B . Tout comme I , J est un idéal de B . Montrons que $K = I \times J$.

L'inclusion directe est immédiate. Si $(x, y) \in K$ alors $x \in I$ et $y \in J$ donc $(x, y) \in I \times J$. Ainsi, $K \subseteq I \times J$.

Soit $(x, y) \in I \times J$. Il existe $b \in B$ et $a \in A$ tels que $(x, b) \in K$ et $(a, y) \in K$. Comme K est un idéal de $A \times B$, $(1, 0)(x, b) = (x, 0) \in K$ et $(0, 1)(a, y) = (0, y) \in K$. De là, $(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in K$. Ainsi, $I \times J \subseteq K$. $\square$

Exemple. Prenons $A = B = \mathbb{R}$. Les idéaux de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$. Les idéaux de $\mathbb{R}^2$ sont donc $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Exemple. Prenons $A = B = \mathbb{Z}$. Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les ensembles $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{N}$. Les idéaux de $\mathbb{Z}^2$ sont donc les ensembles $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ où $a, b \in \mathbb{N}$.