

# Polynômes de Tchebychev

Marc Lorenzi

11 février 2024

## 1 Introduction

**Définition 1.** La suite des *polynômes de Tchebychev* est la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Voici les premiers polynômes de Tchebychev.

| $n$ | $T_n$                                                |
|-----|------------------------------------------------------|
| 0   | 1                                                    |
| 1   | $X$                                                  |
| 2   | $2X^2 - 1$                                           |
| 3   | $4X^3 - 3X$                                          |
| 4   | $8X^4 - 8X^2 + 1$                                    |
| 5   | $16X^5 - 20X^3 + 5X$                                 |
| 6   | $32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$                          |
| 7   | $64X^7 - 112X^5 + 56X^3 - 7X$                        |
| 8   | $128X^8 - 256X^6 + 160X^4 - 32X^2 + 1$               |
| 9   | $256X^9 - 576X^7 + 432X^5 - 120X^3 + 9X$             |
| 10  | $512X^{10} - 1280X^8 + 1120X^6 - 400X^4 + 50X^2 - 1$ |

**Proposition 1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(T_n) = n$ . Si  $n \geq 1$ ,  $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ .

**Démonstration.** Montrons-le par une récurrence à deux termes. C'est clair pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\deg(T_n) = n$ ,  $\deg(T_{n+1}) = n + 1$  et  $\text{cd}(T_{n+1}) = 2^n$ . Comme  $\deg(2XT_{n+1}) = n + 2 > \deg(T_n)$ ,

$$\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = n + 2$$

De plus,

$$\text{cd}(T_{n+2}) = \text{cd}(2XT_{n+1}) = 2 \text{cd}(T_{n+1}) = 2^{n+1}$$

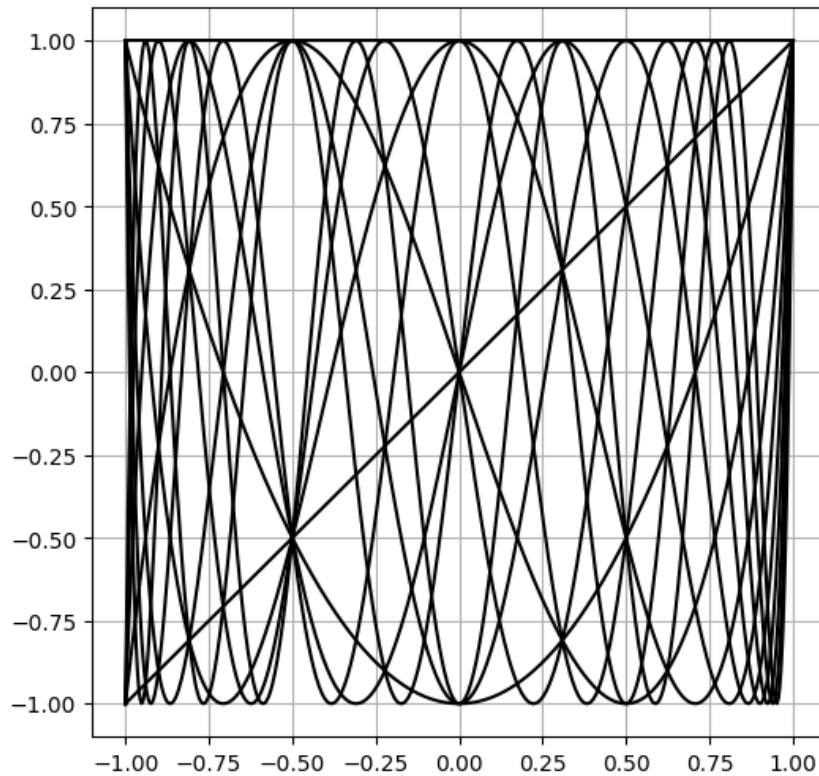


FIGURE 1 – Polynômes de Tchebychev

□

**Proposition 2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  a la même parité que  $n$ .*

**Démonstration.** Ici encore, il s'agit d'une récurrence facile à deux termes. □

**Proposition 3.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos x) = \cos nx$ .*

**Démonstration.** Faisons une récurrence à deux termes. C'est clair pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos x) = \cos nx$  et  $T_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x$ . On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 T_{n+2}(\cos x) &= 2 \cos x T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) \\
 &= 2 \cos x \cos(n+1)x - \cos nx \\
 &= \cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x) - \cos nx \\
 &= \cos(n+2)x
 \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.** Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $|T_n(x)| \leq 1$ .

On peut également obtenir quelques valeurs particulières de  $T_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n(0) = T_n(\cos \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{n\pi}{2}$$

Si  $n$  est impair,  $T_n(0) = 0$ , ce que nous savions déjà puisque dans ce cas,  $T_n$  est impair. Si  $n = 2p$  est pair,  $T_n(0) = (-1)^p$ . On a également

$$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = 1$$

et

$$T_n(-1) = T_n(\cos \pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

### 1. Les racines de $T_n$ et $T'_n$

**Proposition 5.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $T_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . Les racines de  $T_n$  sont simples. Ce sont les réels

$$x_{nk} = \cos \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right)$$

où  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} T_n(x_{nk}) &= \cos n \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \cos \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les  $x_{nk}$  sont donc des racines de  $T_n$ . La fonction  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  et les réels  $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$  sont  $n$  réels distincts de cet intervalle. Les  $x_{nk}$  sont donc distincts deux à deux. Il reste à remarquer que  $\deg(T_n) = n$ . Nous avons donc trouvé toutes les racines de  $T_n$ . De plus, ces racines sont simples puisqu'il y en a  $n$ .  $\square$

Nous avons donc, pour tout  $n \geq 1$ , factorisé  $T_n$  :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_{nk})$$

**Proposition 6.** Pour tout  $n \geq 2$ , le polynôme  $T'_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . Les racines de  $T'_n$  sont simples. Ce sont les réels

$$y_{nk} = \cos \frac{k\pi}{n}$$

où  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

**Démonstration.** Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

En dérivant, il vient

$$(\star) \quad \sin x T'_n(\cos x) = n \sin nx$$

On a donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

$$\sin \frac{k\pi}{n} T'_n(y_{nk}) = n \sin n \frac{k\pi}{n} = n \sin k\pi = 0$$

De plus,  $\sin \frac{k\pi}{n} \neq 0$  donc  $T'_n(y_{nk}) = 0$ . Comme  $\deg(T'_n) = n-1$ , un argument similaire à celui de la preuve de la proposition précédente montre que  $T'_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , les  $y_{nk}$  sont les racines de  $T'_n$  et les  $y_{nk}$  sont simples.  $\square$

Comme  $\deg(T_n) = n$  et  $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ , on a  $\text{cd}(T'_n) = n2^{n-1}$ . Nous avons donc factorisé  $T'_n$  :

$$T'_n = n2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (X - y_{nk})$$

Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , notons

$$\|P\|_\infty = \max\{|P(x)| : x \in [-1, 1]\}$$

**Remarque.** L'égalité  $(\star)$  permet d'obtenir des valeurs particulières de  $T'_n$ . Par exemple, en prenant  $x = \frac{\pi}{2}$ , on obtient

$$T'_n(0) = n \sin \frac{n\pi}{2}$$

Si  $n$  est pair,  $T'_n(0) = 0$ . Si  $n = 2p + 1$  est impair,  $T'_n(0) = n(-1)^p$ .

## 2 Une propriété de minimalité

**Proposition 7.** Soit  $n \geq 1$ . Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant  $2^{n-1}$ . Alors,  $\|P\|_\infty \geq 1$ . On a égalité si et seulement si  $P = T_n$ .

**Démonstration.** Supposons  $\|P\|_\infty \leq 1$ . Posons  $Q = P - T_n$ . On a  $\deg(Q) \leq n-1$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , posons

$$z_k = \cos \frac{k\pi}{n}$$

On a

$$\begin{aligned} Q(z_k) &= P(z_k) - T_n(z_k) \\ &= P(z_k) - (-1)^k \end{aligned}$$

Si  $k$  est pair,

$$Q(z_k) = P(z_k) - 1 \leq 0$$

Si  $k$  est impair,

$$Q(z_k) = P(z_k) + 1 \geq 0$$

Le polynôme  $Q$  change de signe entre  $z_k$  et  $z_{k+1}$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , il existe  $t_k \in [z_k, z_{k+1}]$  tel que  $Q(t_k) = 0$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Il est possible que  $t_k = t_{k+1} = z_k$ . Dans ce cas,  $P(t_k) = \pm 1$ . Comme  $\|P\|_\infty \leq 1$ , le polynôme  $P$  admet en  $t_k$  un extremum local. De plus,  $t_k \neq -1$  et  $t_k \neq 1$ , donc  $P'(t_k) = 0$ . On a aussi  $T'_n(t_k) = 0$ , donc  $Q'(t_k) = 0$ . Ainsi,  $t_k$  est une racine de  $Q$  de multiplicité supérieure ou égale à 2. En comptant les racines avec leurs ordres de multiplicité, nous avons trouvé au moins  $n$  racines de  $Q$ . Or,  $\deg(Q) \leq n-1$ . En conclusion,  $Q = 0$  et donc  $P = T_n$ .  $\square$

### 3 Équation différentielle

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n(\cos t) = \cos nt$$

Dérivons pour obtenir

$$\sin t \, T'_n(\cos t) = n \sin nt$$

Redérivons.

$$\cos t \, T'_n(\cos t) - \sin^2 t \, T''_n(\cos t) = n^2 \cos nt = n^2 T_n(\cos t)$$

On a donc pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$xT'_n(x) - (1-x^2)T''_n(x) - n^2 T_n(x) = 0$$

Le polynôme  $(1-X^2)T''_n - XT'_n + n^2 T_n$  a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi,  $T_n$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$(E_n) \quad (1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

Cette équation différentielle va nous permettre de calculer les coefficients du polynôme  $T_n$ . Posons

$$T_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

**Proposition 8.** Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,

$$a_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(n+k)} a_{k+2}$$

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned}
& (1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = \\
& (1 - X^2) \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2} - X \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} + n^2 \sum_{k=0}^n a_k X^k = \\
& \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k X^{k-2} + \sum_{k=0}^n (-k(k-1) - k + n^2) a_k X^k = \\
& \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} X^k + \sum_{k=0}^n (n^2 - k^2) a_k X^k
\end{aligned}$$

Comme ce polynôme est nul, on en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + (n^2 - k^2)a_k = 0$$

Pour  $k = n-1$ , on obtient  $a_{n-1} = 0$ , ce que nous savions déjà.  $\square$

**Proposition 9.** On suppose  $n \geq 1$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, \lfloor n/2 \rfloor \rrbracket$ ,

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{(n-k-1)!n}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k-1}$$

**Démonstration.** Posons  $p = \lfloor n/2 \rfloor$ . Montrons le résultat par récurrence sur  $k$ . On a

$$(-1)^0 \frac{(n-1)!n}{0!n!} 2^{n-1} = 2^{n-1} = a_n$$

Soit  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ . Supposons l'égalité vérifiée pour  $k$ . On a

$$\begin{aligned}
a_{n-2k-2} &= -\frac{(n-2k-1)(n-2k)}{(2k+2)(2n-2k-2)} a_{n-2k} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{(2k+2)(2n-2k-2)} \frac{(n-k-1)!n}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k-1} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(n-2k-1)(n-2k)}{4(k+1)(n-k-1)} \frac{(n-k-1)!n}{k!(n-2k)!} 2^{n-2k-1} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(n-k-2)!n}{(k+1)!(n-2k-2)!} 2^{n-2k-3}
\end{aligned}$$

qui est bien la valeur recherchée.  $\square$

Par la parité de  $T_n$ , les coefficients  $a_{n-2k-1}$  sont nuls. Nous pouvons donc finalement écrire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2X)^{n-2k}$$

## 4 Orthogonalité

### 4.1 Un produit scalaire

Pour tous polynômes  $P, Q$ , la fonction  $x \mapsto \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  est intégrable sur  $[-1, 1]$ . Notons

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**Proposition 10.** *La fonction  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .*

**Démonstration.** La bilinéarité résulte de la bilinéarité de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  et de la linéarité de l'intégrale. La symétrie résulte de la commutativité de la multiplication dans  $\mathbb{R}$ . La positivité résulte de la positivité de l'intégrale. Soit enfin  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Supposons  $\langle P, P \rangle = 0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$  est continue et positive sur  $] -1, 1[$  et son intégrale est nulle. Par le théorème de nullité de l'intégrale, on a pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,  $P(x)^2 = 0$ . Le polynôme  $P$  a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.  $\square$

### 4.2 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

**Proposition 11.** *La famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire  $\langle, \rangle$ .*

**Démonstration.** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . En effectuant le changement de variable  $x = \cos t$  dans  $\langle T_m, T_n \rangle$ , il vient

$$\begin{aligned} \langle T_m, T_n \rangle &= \int_0^\pi T_m(\cos t) T_n(\cos t) dt \\ &= \int_0^\pi \cos mt \cos nt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(m+n)t dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(m-n)t dt \end{aligned}$$

Supposons  $m \neq n$ . On a donc  $m+n \neq 0$  et  $m-n \neq 0$ . De là,

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{1}{2(m+n)} [\sin(m+n)t]_0^\pi + \frac{1}{2(m-n)} [\sin(m-n)t]_0^\pi = 0$$

La famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une famille orthogonale. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(T_n) = n$ , cette famille est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .  $\square$

Que vaut  $\|T_n\|$ ? Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= \int_0^\pi \cos^2 nt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2nt) dt \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## 5 Intégrales

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $x_0, \dots, x_n$  les racines du polynôme  $T_{n+1}$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , soit  $\lambda_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  par  $\lambda_k(P) = P(x_k)$ .

**Proposition 12.** *La famille  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]^*$ .*

**Démonstration.** Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Supposons que

$$f = \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k = 0$$

Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Soit

$$P = \prod_{k \neq j} (X - x_k)$$

Le polynôme  $P$  est de degré  $n$ , pour tout  $k \neq j$ ,  $P(x_k) = 0$  et  $P(x_j) \neq 0$ . On a donc

$$0 = f(P) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k(P) = a_j \lambda_j(P)$$

On en déduit que  $a_j = 0$ . La famille  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  est donc libre. Comme elle est de cardinal  $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]^*$ , c'est une base du dual de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  $\square$

Soit  $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  par

$$\psi(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

La restriction de  $\psi$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . Il existe donc une unique famille de réels  $(a_0, \dots, a_n)$  telle que pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\psi(P) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k(P) = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k)$$

Cette égalité est en fait vérifiée par tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $2n + 1$ .

**Proposition 13.** *Pour tout  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ,*

$$\psi(P) = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k)$$



**Démonstration.** Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\psi(T_i T_{n+1}) = \langle T_i, T_{n+1} \rangle = 0$$

et aussi

$$\sum_{k=0}^n a_k T_i(x_k) T_{n+1}(x_k) = 0$$

puisque les  $x_k$  sont les racines de  $T_{n+1}$ . La famille

$$(1, X, \dots, X^n, T_0 T_{n+1}, \dots, T_n T_{n+1})$$

est une base de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  et pour tout polynôme  $P$  de cette base, on a  $\psi(P) = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k)$ . Par linéarité, cette égalité reste vraie pour tout  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ .  $\square$

## 6 Interpolation d'Hermite

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $x_0, \dots, x_n$  les racines du polynôme  $T_{n+1}$ . Rappelons que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n+2} + \frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Soit  $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  l'application définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  par

$$\varphi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n), P'(x_0), \dots, P'(x_n))$$

Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ . Supposons que  $P \in \ker \varphi$ . Les  $x_k$  sont donc racines au moins doubles de  $P$ . le polynôme  $P$  a ainsi au moins  $2n+2$  racines, c'est donc le polynôme nul. L'application linéaire  $\varphi$  est donc injective. Comme  $\dim \mathbb{R}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n+2} = 2n+2$ , c'est un isomorphisme.

Dans la suite, nous noterons

$$Q = \prod_{k=0}^n (X - x_k)^2$$

Soit  $f \in \mathcal{D}^1([-1, 1])$ . Comme  $\varphi$  est un isomorphisme, il existe un unique polynôme  $P_f \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  tel que

$$\varphi(P_f) = (f(x_0), \dots, f(x_n), f'(x_0), \dots, f'(x_n))$$

Ce polynôme est le *polynôme d'interpolation d'Hermite* de  $f$  aux points  $x_k$ .

**Proposition 14.** Soit  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([-1, 1])$ . Pour tout  $t \in [-1, 1]$ , il existe  $c \in ]-1, 1[$  tel que

$$f(t) - P_f(t) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} Q(t)$$

**Démonstration.** Soit  $t \in [-1, 1]$ . Si  $t$  est l'un des  $x_k$ , l'existence de  $c$  est immédiate puisque les deux membres de l'égalité sont nuls. Supposons que  $t$  n'est pas l'un des  $x_k$ . Considérons la fonction  $g_t : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g_t(x) = f(x) - P_f(x) - \frac{f(t) - P_f(t)}{Q(t)}Q(x)$$

La fonction  $g_t$  est, tout comme  $f$ , de classe  $\mathcal{C}^{2n+2}$  sur  $[-1, 1]$ . Elle s'annule en les  $n + 2$  points  $x_0, \dots, x_n$  et  $t$ . Par le théorème de Rolle,  $g'_t$  s'annule en  $n + 1$  points de  $] - 1, 1[$  qui sont différents des  $x_k$ . Par ailleurs, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$g'_t(x) = f'(x) - P'_f(x) - \frac{f(t) - P_f(t)}{Q(t)}Q'(x)$$

La fonction  $g'_t$  s'annule donc aussi en  $x_0, \dots, x_n$ . Ainsi,  $g'_t$  s'annule en au moins  $2n + 2$  points de  $] - 1, 1[$ . Par des applications successives du théorème de Rolle,  $g_t^{(2n+2)}$  s'annule en au moins un réel  $c \in ] - 1, 1[$ . Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} g_t^{(2n+2)}(x) &= f^{(2n+2)}(x) - P_f^{(2n+2)}(x) - \frac{f(t) - P_f(t)}{Q(t)}Q^{(2n+2)}(x) \\ &= f^{(2n+2)}(x) - (2n + 2)! \frac{f(t) - P_f(t)}{Q(t)} \end{aligned}$$

En effet,  $\deg(P_f) \leq 2n + 1$  donc  $P_f^{(2n+2)} = 0$ , et  $Q$  est unitaire et  $\deg(Q) = 2n + 2$  donc  $Q^{(2n+2)} = (2n + 2)!$ . Ainsi, en évaluant en  $c$ ,

$$0 = g_t^{(2n+2)}(c) = f^{(2n+2)}(c) - (2n + 2)! \frac{f(t) - P_f(t)}{Q(t)}$$

d'où

$$f(t) - P_f(t) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n + 2)!}Q(t)$$

□

Remarquons que

$$Q = \frac{1}{2^{2n}}T_{n+1}^2$$

On a donc pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$|Q(t)| = \frac{1}{2^{2n}}|T_{n+1}(t)|^2 \leq \frac{1}{2^{2n}}$$

Posons

$$M_{2n+2} = \max\{|f^{(2n+2)}(t)| : t \in [-1, 1]\}$$

On a alors pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$|f(t) - P_f(t)| \leq \frac{M_{2n+2}}{2^{2n}(2n + 2)!}$$