

Puissances

Marc Lorenzi

29 juin 2026

Sans pour l'instant préciser qui sont x , y , m et n , voici trois « formules » censées nous dire quelque chose sur les propriétés des « puissances ». Mais qu'est-ce qu'une puissance ?

$$\begin{aligned}(x \times y)^n &= x^n \times y^n \\ x^{m+n} &= x^m \times x^n \\ x^{m \times n} &= (x^m)^n\end{aligned}$$

FIGURE 1 – Les trois propriétés fondamentales des puissances

Il va nous falloir préciser tout cela. Qui sont x et y ? Des nombres ? Peut-être, peut-être pas. Et qui sont m et n ? Des entiers ? Dans la première moitié de l'article ce sera le cas. Mais cela ne durera pas jusqu'à la fin.

1 Premiers pas

1.1 Notion de monoïde

Rappelons que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des *entiers naturels*.

Nous allons commencer par définir x^n où $n \in \mathbb{N}$ est x est un « objet ». Quel genre d'objet ? À quel type d'ensemble x doit-il appartenir ? Cet ensemble doit posséder une *multiplication* ainsi qu'un *élément neutre*. La multiplication doit également posséder un certain nombre de propriétés. Un tel ensemble est appelé un *monoïde*.

Définition 1.1.1. Un *monoïde* est un triplet $(M, \times, 1)$, où M est un ensemble, $\times$ est une opération sur l'ensemble M et $1 \in M$, vérifiant les propriétés suivantes.

- $\times$ est *associative* : pour tous $x, y, z \in M$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- 1 est *neutre* pour l'opération $\times$: pour tout $x \in M$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

Exemple. En notant $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, le triplet $(\mathbb{R}, \times, 1)$ est un monoïde.

Pourquoi se compliquer la vie ? Ne pourrait-on pas juste travailler avec des nombres, plutôt que de considérer des structures abstraites ? Oui, bien entendu. Je pourrais me contenter de définir x^2 , x^3 ou x^{1789} lorsque x est un nombre réel. Mais en travaillant dans un monoïde « abstrait », nous pourrions nous concentrer *uniquement* sur le concept de puissance, sans être tentés d'utiliser des propriétés spécifiques des nombres. Je regrette d'ailleurs déjà d'avoir appelé « 1 » l'élément neutre du monoïde. J'aurais dû l'appeler e , ou ε , ou n'importe quoi d'autre. Mais bon, gardons la notation « 1 ».

1.2 Qu'est-ce qu'une puissance ?

Dans toute la suite, nous nous donnons un monoïde $(M, \times, 1)$.

Définition 1.2.2. Soit $x \in M$. On définit x^n par récurrence sur n en posant

- (1) $x^0 = 1$
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$.

Exemples. Donnons nous $x \in M$. En prenant $n = 0$ dans la deuxième partie de la définition, on obtient

$$x^1 = x^{0+1} = x^0 \times x = 1 \times x = x$$

Recommençons avec cette fois $n = 1$:

$$x^2 = x^{1+1} = x^1 \times x = x \times x$$

Encore une fois, avec $n = 2$:

$$x^3 = x^{2+1} = x^2 \times x = (x \times x) \times x = x \times x \times x$$

Les parenthèses ne sont pas utiles parce que la multiplication est *associative*. D'une certaine façon, si $n \geq 2$,

$$x^n = x \times \dots \times x \text{ (} n \text{ fois)}$$

Mais notre définition est beaucoup plus rigoureuse. Grâce à cela, nous pourrions *montrer* les propriétés des puissances.

Dans la figure ci-dessous on a pris $M = \mathbb{R}$. En abscisse, x . En ordonnée, x^n pour $0 \leq n \leq 9$. Remarquer la droite horizontale qui correspond à x^0 (qui vaut 1) et la droite oblique qui correspond à x^1 (qui vaut x). Remarquer aussi que toutes les puissances de 1 sont égales à 1 (point bleu). Les puissances de -1 valent quant à elles 1 ou -1 (points vert et jaune). Les puissances de 0 valent 0 (point rouge), sauf 0^0 qui est égal à 1 (point noir).

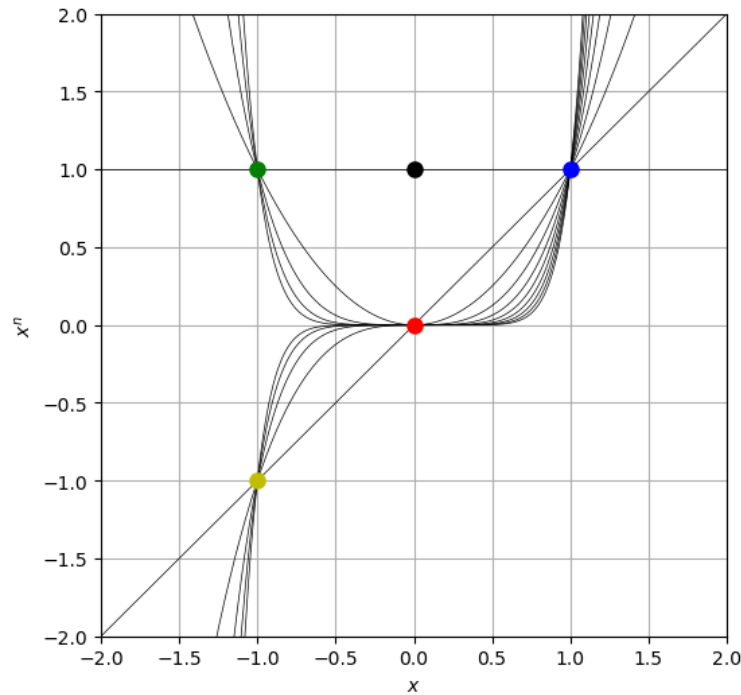


FIGURE 2 – Les puissances entières positives.

1.3 Propriétés

Nous allons maintenant montrer les trois propriétés fondamentales des puissances.

Proposition 1.3.1. *Pour tous $x, y \in M$ et tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \times y = y \times x$ alors*

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n$$

Démonstration. Soient $x, y \in M$. Montrons l'égalité par récurrence sur n . Tout d'abord, par (1) appliqué 3 fois,

$$(x \times y)^0 = 1 = 1 \times 1 = x^0 \times y^0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$(H) \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n$$

Par (2),

$$(x \times y)^{n+1} = (x \times y)^n \times (x \times y)$$

Par l'hypothèse (H),

$$(x \times y)^{n+1} = (x^n \times y^n) \times (x \times y)$$

Comme $x \times y = y \times x$, on montre facilement par récurrence sur n que $y^n \times x = x \times y^n$. La multiplication est associative. On a donc, en utilisant deux fois (2),

$$(x \times y)^{n+1} = (x^n \times x) \times (y^n \times y) = x^{n+1} \times y^{n+1}$$

□

Passons à la deuxième propriété fondamentale.

Proposition 1.3.2. *Pour tout $x \in M$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

Démonstration. Soient $x \in M$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrons l'égalité par récurrence sur n . Tout d'abord, par (1),

$$x^m \times x^0 = x^m \times 1 = x^m = x^{m+0}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$(H) \quad x^m \times x^n = x^{m+n}$$

Par (2),

$$x^m \times x^{n+1} = x^m \times x^n \times x$$

Par (H) et (2),

$$x^m \times x^n \times x = x^{m+n} \times x = x^{m+n+1}$$

□

Montrons enfin la troisième propriété fondamentale.

Proposition 1.3.3. *Pour tout $x \in M$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

Démonstration. Soient $x \in M$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrons l'égalité par récurrence sur n . Tout d'abord, par (1) appliqué 2 fois,

$$(x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \times 0}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$(H) \quad (x^m)^n = x^{m \times n}$$

Par (2),

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \times x^m$$

Par (H) et (2),

$$(x^m)^n \times x^m = x^{m \times n} \times x^m$$

Utilisons enfin la proposition 2 pour écrire

$$x^{m \times n} \times x^m = x^{(m \times n) + m}$$

Il reste à remarquer que

$$(m \times n) + m = (m \times n) + (m \times 1) = m \times (n + 1)$$

d'où le résultat. $\square$

2 Extension aux entiers négatifs

2.1 Notion de groupe

Rappelons que $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des *entiers relatifs*.

Nous allons définir x^n lorsque $n \in \mathbb{Z}$. Pour cela, être dans un monoïde ne suffit plus. Nous devons nous placer dans un *groupe*.

Définition 2.1.3. Un *groupe* est un monoïde $(G, \times, 1)$ vérifiant la propriété supplémentaire suivante : pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $x \times x' = x' \times x = 1$.

On peut montrer qu'un tel x' est unique. On l'appelle l'*inverse* de x .

Exemple. En notant $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $(\mathbb{R}^*, \times, 1)$ est un groupe. On peut aussi remplacer $\mathbb{R}^*$ par $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des réels strictement positifs.

2.2 Puissances négatives

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans un groupe $(G, \times, 1)$.

Définition 2.2.4. Soient $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \geq 0$, on sait déjà ce que signifie x^n . Si $n < 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et on pose

$$x^n = (x')^{-n}$$

Exemple. Soit $x \in G$. Prenons $n = -1$. On a

$$x^{-1} = (x')^1 = x'$$

Dans beaucoup d'ouvrages, « x^{-1} » est une simple notation, mais nous venons de *montrer* que x^{-1} est l'inverse de x .

Dans la figure ci-dessous, on a pris $G = \mathbb{R}^*$. En abscisse, x . En ordonnée, x^n pour $-9 \leq n \leq 9$.

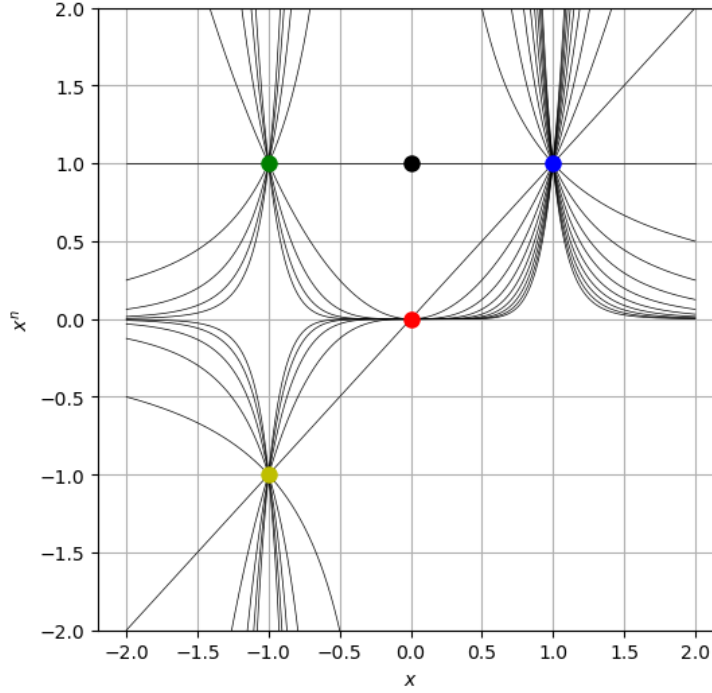


FIGURE 3 – Les puissances entières de signe quelconque.

2.3 Propriétés

Nous allons montrer que les trois propriétés fondamentales des puissances restent vérifiées pour des puissances négatives (elles méritent donc d'être appelées des puissances). Remarquons tout d'abord que la *définition* des puissances positives devient un *théorème* pour les puissances négatives. C'est l'objet du lemme ci-dessous.

Lemme 2.3.4. *Pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$x^{n+1} = x^n \times x$$

Démonstration. Soient $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous savons déjà que l'égalité est vraie si $n \geq 0$. Supposons dorénavant $n < 0$. Posons $m = -n$, de sorte que $m \geq 1$. On a

$$x^{n+1} = x^{-m+1} = x^{-(m-1)} = (x')^{m-1}$$

Multiplions par x' des deux côtés de l'égalité. Par les propriétés des puissances positives,

$$x^{n+1} \times x' = (x')^{m-1} \times x' = (x')^{m-1+1} = (x')^m = (x')^{-n} = x^n$$

En multipliant maintenant par x des deux côtés de l'égalité, x' s'élimine dans le membre de gauche (car $x' \times x = 1$) et il vient

$$x^{n+1} = x^n \times x$$

□

Montrons la première propriété fondamentale.

Proposition 2.3.5. *Pour tous $x, y \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, si $x \times y = y \times x$ alors*

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, la proposition 1 nous dit que $(x \times y)^n = x^n \times y^n$. Supposons maintenant $n < 0$. Soit $m = -n$. On a $m \in \mathbb{N}$ et $n = -m$ donc, par définition d'une puissance négative,

$$(x \times y)^n = (x \times y)^{-m} = ((x \times y)')^m$$

On peut facilement montrer que

$$(x \times y)' = y' \times x'$$

On a donc

$$(x \times y)^n = (y' \times x')^m$$

Par la proposition 1,

$$(y' \times x')^m = (y')^m \times (x')^m = y^{-m} \times x^{-m} = y^n \times x^n$$

Comme $x \times y = y \times x$, on a aussi $x^n \times y^n = y^n \times x^n$, d'où le résultat. □

Remarquons une conséquence intéressante de cette propriété.

Lemme 2.3.6. *Pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$(x^n)' = (x')^n$$

Démonstration. Soit $x \in G$. On a $x \times x' = x' \times x = 1$ et donc

$$(x')^n \times x^n = x^n \times (x')^n = (x \times x')^n = 1^n = 1$$

De là, l'inverse de x^n est $(x')^n$. □

Passons à la propriété fondamentale numéro 2.

Proposition 2.3.7. *Pour tout $x \in G$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$,*

$$x^{m+n} = x^m \times x^n$$

Démonstration. En utilisant le lemme 4 et une preuve analogue à celle de la proposition 2, on montre que la propriété est vraie pour $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soient maintenant $m \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$. Posons $n = -p$, de sorte que $p > 0$. En utilisant ce que nous venons juste de dire,

$$x^m = x^{(m-p)+p} = x^{m-p} x^p = x^{m+n} x^p$$

Multiplions par x^n pour obtenir

$$x^m \times x^n = x^{m+n} x^p x^n$$

Il reste à remarquer que

$$x^n = (x')^p$$

pour obtenir

$$x^m \times x^n = x^{m+n} x^p (x')^p = x^{m+n} (xx')^p = x^{m+n} 1^p = x^{m+n}$$

□

Proposition 2.3.8. *Pour tout $x \in G$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$,*

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

Démonstration. Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 montre que la propriété est vraie si $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons dorénavant $n < 0$. Posons $n = -p$, de sorte que $p > 0$. On a, en utilisant le lemme 6,

$$(x^m)^n = (x^m)^{-p} = ((x^m)')^p = ((x')^m)^p$$

Comme $p > 0$, la première partie de la démonstration nous dit que

$$((x')^m)^p = (x')^{m \times p} = x^{-(m \times p)} = x^{m \times (-p)} = x^{m \times n}$$

□

3 Puissances rationnelles

Rappelons que les *nombre rationnels* sont les nombres de la forme $\frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Pour parler de puissances fractionnaires, il n'est plus possible de se placer dans un groupe G quelconque. Nous allons devoir revenir à des choses plus terre à terre : dans toute la suite, nous prendrons $G = \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des réels strictement positifs.

3.1 Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f_n(x) = x^n$$

Proposition 3.1.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$f'_n(x) = nx^{n-1}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = x$. La fonction f_1 est dérivable en x , et

$$f_1'(x) = 1 = 1 \times x^0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n(x) \times x$$

La fonction f_{n+1} , produit de deux fonctions dérivables, est aussi dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \times x + f_n(x) \times 1 = nx^{n-1} \times x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

□

Proposition 3.1.10. *La fonction f_n est une bijection.*

Démonstration. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) > 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante. Lorsque x tend vers 0, $f_n(x)$ tend vers $\alpha = 0$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $f_n(x)$ tend vers $\beta = +\infty$. Les théorèmes généraux de l'Analyse nous disent que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $] \alpha, \beta[= \mathbb{R}_+^*$. □

Définition 3.1.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}^n$,

$$x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$$

où f^{-1} désigne la *réci-proque* de la bijection f .

Pour dire les choses autrement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x \quad \text{et} \quad (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$$

Définition 3.1.6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Écrivons $r = m/n$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors

$$x^r = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

En fait, il y a un problème dans notre définition. Un rationnel s'écrit de plusieurs façons comme un quotient d'entiers. Par exemple, $2/3 = 4/5 = 34/51 = \dots$. Nous allons devoir montrer que notre définition des puissances ne dépend pas de la façon dont on a écrit le rationnel.

Proposition 3.1.11. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $m, m' \in \mathbb{Z}$ et $n, n' \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Alors,*

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{m'})^{\frac{1}{n'}}$$

Démonstration. Si $m = 0$ ou $m' = 0$, alors $m = m' = 0$ et l'égalité est évidente. Supposons donc m et m' non nuls.

Soient $y = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ et $y' = (x^{m'})^{\frac{1}{n'}}$. On a, par définition des puissances rationnelles,

$$y^n = x^m \quad \text{et} \quad y'^{n'} = x^{m'}$$

En élevant la première égalité à la puissance m' et la seconde à la puissance m , on obtient

$$y^{nm'} = x^{mm'} \quad \text{et} \quad y'^{n'm} = x^{m'm}$$

Or, $mm' = m'm$, donc

$$y^{nm'} = x^{mm'} = x^{m'm} = y'^{n'm}$$

Comme $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, on a $nm' = n'm$. De là,

$$y^{nm'} = y'^{n'm} = (y')^{nm'}$$

La fonction $f_{nm'}$ est une bijection, donc $y = y'$. $\square$

Nous voilà sauvés. Nous avons bien défini x^r pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$. Il nous reste à voir que nos nouvelles puissances sont bien des puissances. Vérifient-elles les trois propriétés fondamentales ?

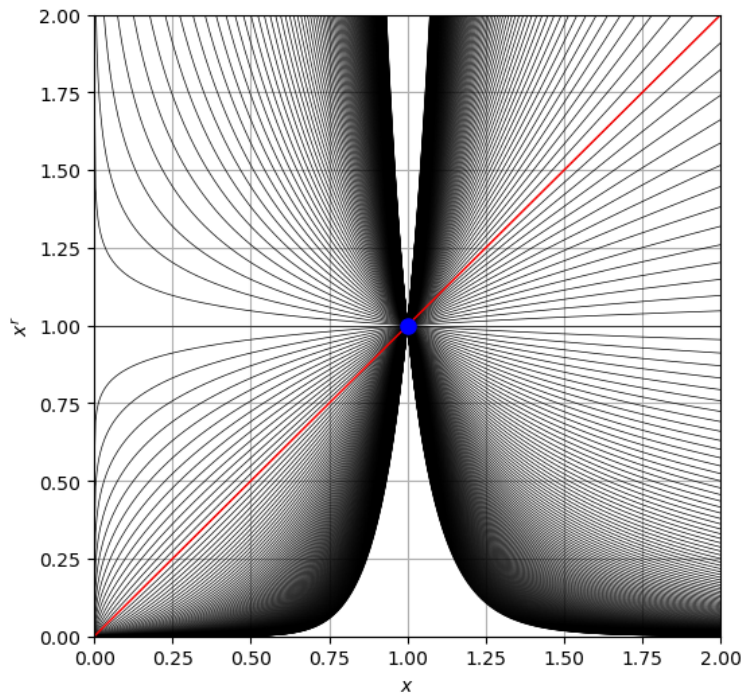


FIGURE 4 – Les puissances rationnelles.

3.2 Propriétés

Proposition 3.2.12. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$(x \times y)^r = x^r \times y^r$$

Démonstration. Écrivons $r = \frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par les propriétés des puissances entières,

$$(x^r \times y^r)^n = (x^r)^n \times (y^r)^n$$

Remarquons que

$$(x^r)^n = ((x^m)^{\frac{1}{n}})^n = x^m$$

et, de même,

$$(y^r)^n = y^m$$

Ainsi,

$$(x^r \times y^r)^n = x^m \times y^m = (x \times y)^m$$

Par ailleurs

$$((x \times y)^r)^n = (((x \times y)^m)^{\frac{1}{n}})^n = (x \times y)^m$$

Nous avons donc

$$(x^r \times y^r)^n = ((x \times y)^r)^n$$

Par la bijectivité de la fonction f_n ,

$$x^r \times y^r = (x \times y)^r$$

□

Proposition 3.2.13. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $r, r' \in \mathbb{Q}$,

$$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$$

Démonstration. Posons $r = \frac{m}{n}$ et $r' = \frac{m'}{n'}$ où $m, m' \in \mathbb{Z}$ et $n, n' \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$r + r' = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}$$

Par les propriétés des puissances entières,

$$(x^r \times x^{r'})^{nn'} = (x^r)^{nn'} \times (x^{r'})^{nn'}$$

Écrivons (désolé, pas le choix)

$$(x^r)^{nn'} = (((x^m)^{\frac{1}{n}})^n)^{n'} = (x^m)^{n'} = x^{mn'}$$

De même,

$$(x^{r'})^{nn'} = x^{m'n}$$

En regroupant le tout, on a donc

$$(x^r \times x^{r'})^{nn'} = x^{mn'} \times x^{m'n} = x^{mn'+m'n} = x^{(r+r')nn'} = (x^{r+r'})^{nn'}$$

Comme la fonction $f_{nn'}$ est une bijection, on en déduit le résultat cherché. $\square$

Allez, encore une dernière. La preuve est très semblable à celle de la précédente.

Proposition 3.2.14. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $r, r' \in \mathbb{Q}$,*

$$(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

Démonstration. Posons $r = \frac{m}{n}$ et $r' = \frac{m'}{n'}$ où $m, m' \in \mathbb{Z}$ et $n, n' \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que

$$r \times r' = \frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$$

Par les propriétés des puissances entières,

$$((x^r)^{r'})^{nn'} = (((x^r)^{r'})^{n'})^n$$

Remarquons que

$$((x^r)^{r'})^{n'} = (x^r)^{m'}$$

On a donc la simplification

$$((x^r)^{r'})^{nn'} = ((x^r)^{m'})^n = ((x^r)^n)^{m'}$$

Encore une simplification :

$$(x^r)^n = x^m$$

ce qui permet d'écrire

$$((x^r)^{r'})^{nn'} = (x^m)^{m'} = x^{mm'} = (x^{rr'})^{nn'}$$

Comme la fonction $f_{nn'}$ est une bijection, on en déduit le résultat cherché. $\square$

4 Puissances réelles

Dernière étape (enfin on peut le croire) : il existe des nombres réels qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$, comme par exemple π ou $\sqrt{2}$. Est-il possible de définir x^y pour *tous* les réels y ? C'est ce que nous allons faire maintenant.

4.1 Exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle est sans doute la fonction la plus importante des mathématiques. Nous la noterons $\exp$. On a $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Pourquoi l'exponentielle est-elle importante ? Parce qu'elle est un *morphisme de groupes* : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Notons également que $\exp(0) = 1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$$

Cerise sur le gâteau, l'exponentielle est une *bijection*. Sa réciproque est la fonction *logarithme népérien* que nous noterons $\ln$. On a $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Tout comme l'exponentielle, le logarithme est un morphisme de groupes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Notons également que $\ln 1 = 0$. Enfin, le logarithme est une bijection. En particulier, il existe un unique réel $e > 0$ tel que $\ln e = 1$.

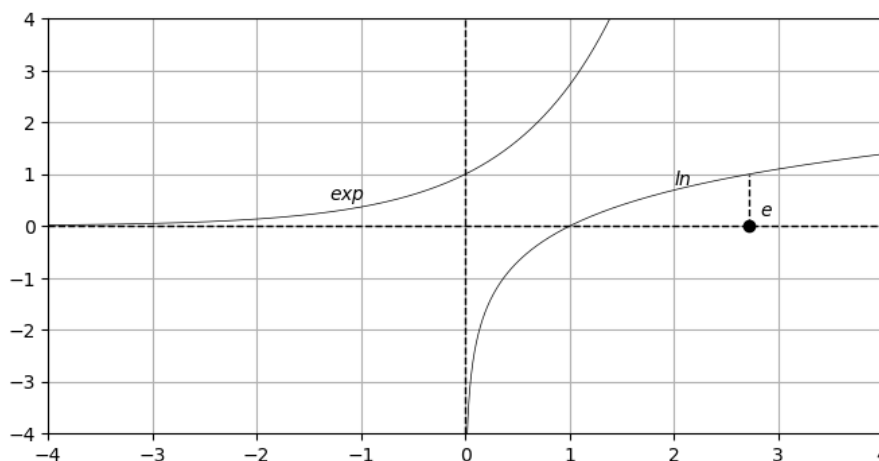


FIGURE 5 – Exponentielle et logarithme.

4.2 Puissances quelconques

La définition des puissances quelconques n'est pas vraiment naturelle. Commençons par définir une fonction de deux variables, que nous noterons $p(x, y)$.

Définition 4.2.7. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$p(x, y) = \exp(y \times \ln x)$$

Pourquoi p ? Euh, p comme puissance ? C'est exactement cela. La proposition suivante nous dit que si $y \in \mathbb{Q}$, alors $p(x, y)$ est effectivement une puissance.

Proposition 4.2.15. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{Q}$,*

$$p(x, y) = x^y$$

Démonstration. Nous allons procéder en plusieurs étapes. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons d'abord le résultat lorsque $y \in \mathbb{N}$. Pour cela, faisons une récurrence sur y . Tout d'abord,

$$p(x, 0) = \exp(0 \times \ln x) = \exp(0) = 1 = x^0$$

Soit $y \in \mathbb{N}$. Supposons que $p(x, y) = x^y$. On a alors

$$\begin{aligned} p(x, y+1) &= \exp((y+1) \times \ln x) \\ &= \exp(y \times \ln x + \ln x) \\ &= \exp(y \times \ln x) \times \exp(\ln x) \\ &= x^y \times x \\ &= x^{y+1} \end{aligned}$$

Montrons maintenant le résultat lorsque $y \in \mathbb{Z}$ et $y < 0$. Posons $y = -n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \exp((-n) \times \ln x) \\ &= \exp(-(n \times \ln x)) \\ &= \exp(n \times \ln x)^{-1} \\ &= (x^n)^{-1} \\ &= x^{-n} \\ &= x^y \end{aligned}$$

Montrons enfin le résultat lorsque $y \in \mathbb{Q}$. Posons $y = \frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$p(x, y)^n = \exp\left(\frac{m}{n} \times \ln x\right)^n = \exp\left(n \times \frac{m}{n} \times \ln x\right) = \exp(m \ln x) = x^m$$

et donc

$$p(x, y) = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^y$$

□

Lorsque $y \in \mathbb{Q}$, les nombres $p(x, y)$ et x^y sont donc égaux. Franchissons le pas et écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et aussi pour tout $y \in \mathbb{R}$, x^y au lieu de $p(x, y)$. Bien entendu, nous allons nous dépêcher de montrer que les trois propriétés fondamentales des puissances sont encore vérifiées. Assez curieusement, le plus dur est passé. Ces trois propriétés sont des conséquences directes des propriétés de l'exponentielle et du logarithme (que nous avons admises. Peut-être la difficulté se cache-t-elle dans la preuve de ces propriétés ? Eh oui).

4.3 Propriétés

Proposition 4.3.16. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z \in \mathbb{R}$,*

$$(x \times y)^z = x^z \times y^z$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x \times y)^z &= \exp(z \times \ln(x \times y)) \\ &= \exp(z \times (\ln x + \ln y)) \\ &= \exp(z \times \ln x + z \times \ln y) \\ &= \exp(z \times \ln x) \times \exp(z \times \ln y) \\ &= x^z \times y^z\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.17. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $y, z \in \mathbb{R}$,*

$$x^{y+z} = x^y \times x^z$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, z \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x^{y+z} &= \exp((y + z) \times \ln x) \\ &= \exp(y \times \ln x + z \times \ln x) \\ &= \exp(y \times \ln x) \times \exp(z \times \ln x) \\ &= x^y \times x^z\end{aligned}$$

□

Proposition 4.3.18. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $y, z \in \mathbb{R}$,*

$$(x^y)^z = x^{y \times z}$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, z \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\ln(x^y) = \ln(\exp(y \times \ln x)) = y \times \ln x$$

De là,

$$\begin{aligned}(x^y)^z &= \exp(z \times \ln(x^y)) \\ &= \exp(z \times y \times \ln x) \\ &= \exp((y \times z) \times \ln x) \\ &= x^{y \times z}\end{aligned}$$

□

Et voilà. Nous savons maintenant ce que signifie x^y pour tout réel $x > 0$ et tout réel y . Un dernier détail ...

4.4 Le nombre e

Souvenons-nous que e est l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut e^x ?

Proposition 4.4.19. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x) = e^x$$

Démonstration. En effet, $e^x = \exp(x \times \ln e) = \exp(x \times 1) = \exp(x)$. □

5 L'universalité des puissances

La première propriété fondamentale des puissances nous dit que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a$$

Cette propriété est-elle vraiment si fondamentale ? Oh que oui ! Nous allons montrer qu'elle est *caractéristique* des puissances.

Proposition 5.0.20. *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(1) \neq 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$(\star) \quad f(x \times y) = f(x) \times f(y)$$

Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^$,*

$$f(x) = x^a$$

Pour montrer ce résultat, nous allons procéder en plusieurs étapes.

Lemme 5.0.21. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \in \mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

et donc, par $(\star)$,

$$f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$$

Toujours par $(\star)$,

$$f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, $f(1) \neq 0$, donc $f(x) \neq 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant considérer que $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \ln(f(\exp(x)))$$

Les fonctions f , $\exp$ et $\ln$ étant continues, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Lemme 5.0.22. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \ln(f(\exp(x + y))) \\ &= \ln(f(\exp(x) \times \exp(y))) \\ &= \ln(f(\exp(x)) \times f(\exp(y))) \\ &= \ln(f(\exp(x))) + \ln(f(\exp(y))) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

$\square$

Posons $a = g(0)$.

Lemme 5.0.23. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n \times x) = n \times g(x)$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . On a $0 = 0 + 0$. De là,

$$g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0)$$

En soustrayant $g(0)$, on obtient $g(0) = 0$, ou encore $g(0 \times x) = 0 \times g(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $g(n \times x) = n \times g(x)$. On a alors

$$g((n + 1) \times x) = g(n \times x + x) = g(n \times x) + g(x) = n \times g(x) + g(x) = (n + 1) \times g(x)$$

$\square$

En particulier, en prenant $x = 1$, on a $g(n) = a \times n$.

Lemme 5.0.24. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g(n) = a \times n$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$, nous avons déjà le résultat. Supposons donc $n < 0$, de sorte que $-n \in \mathbb{N}$. On a $0 = n + (-n)$ et donc

$$0 = g(0) = g(n + (-n)) = g(n) + g(-n)$$

De là,

$$g(n) = -g(-n) = -a \times (-n) = a \times n$$

$\square$

Lemme 5.0.25. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = a \times x$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Écrivons $x = \frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n \times x = m$. De là,

$$g(n \times x) = n \times g(x) = g(m) = a \times m$$

En divisant par n , on obtient

$$g(x) = a \times \frac{m}{n} = a \times x$$

□

Lemme 5.0.26. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a \times x$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$: il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que x_n tend vers x lorsque n tend vers l'infini. Comme g est continue en x , $g(x_n)$ tend vers $g(x)$. Mais $x_n \in \mathbb{Q}$, donc $g(x_n) = a \times x_n$. Ainsi, $a \times x_n$ tend vers $g(x)$. Or, $a \times x_n$ tend aussi vers $a \times x$ donc, par unicité de la limite, $g(x) = a \times x$. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème.

Démonstration. Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\ln(f(\exp(t))) = g(t) = a \times t$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $t = \ln x$. On a $\exp(t) = x$ et donc

$$\ln(f(x)) = g(t) = a \times \ln x = \ln x^a$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$f(x) = x^a$$

□

6 Puissances complexes

Quoi ? Ce n'est pas fini ? J'aurais pu m'arrêter là mais j'avais envie de faire de jolis dessins. Il se trouve que la fonction exponentielle peut être *prolongée* à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\exp(z) = \exp(x) \times (\cos y + i \sin y)$$

La trigonométrie s'invite là où on ne l'attendait pas ...

Toutes les propriétés de l'exponentielle réelle restent vérifiées par l'exponentielle complexe. On ne peut résister à la tentation de poser, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$t^z = \exp(z \times \ln t)$$

De façon plus explicite,

$$\begin{aligned}
 t^z &= \exp(x \times \ln t + iy \times \ln t) \\
 &= \exp(x \times \ln t) \times (\cos(y \times \ln t) + i \sin(y \times \ln t)) \\
 &= t^x \times (\cos(y \times \ln t) + i \sin(y \times \ln t))
 \end{aligned}$$

J'épargnerai au lecteur la preuve des trois propriétés fondamentales des puissances. Ces propriétés restent toujours vérifiées. *Les puissances complexes sont donc bien de vraies puissances.*

Voici pour terminer les jolis dessins annoncés un peu plus haut. Les deux figures ci-dessous représentent la partie réelle et la partie imaginaire de $x^{0.5+iy}$, où $y \in \mathbb{R}$. En comparant avec les figures du reste de l'article, le lecteur sera convaincu que les puissances complexes, ce n'est pas simple.

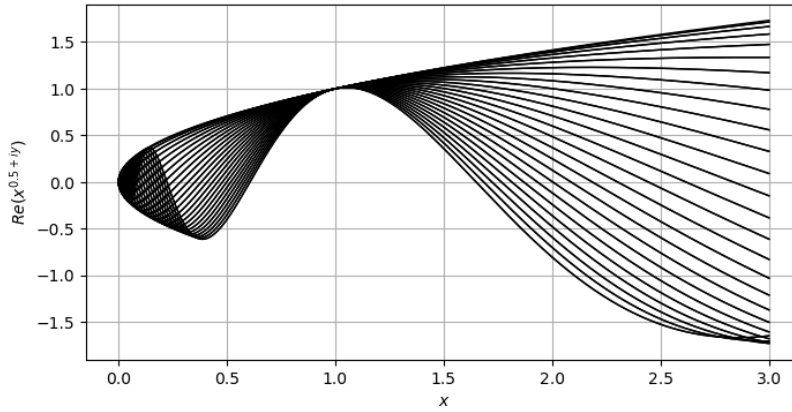


FIGURE 6 – La partie réelle de $x^{0.5+iy}$ où $y \in \mathbb{R}$.

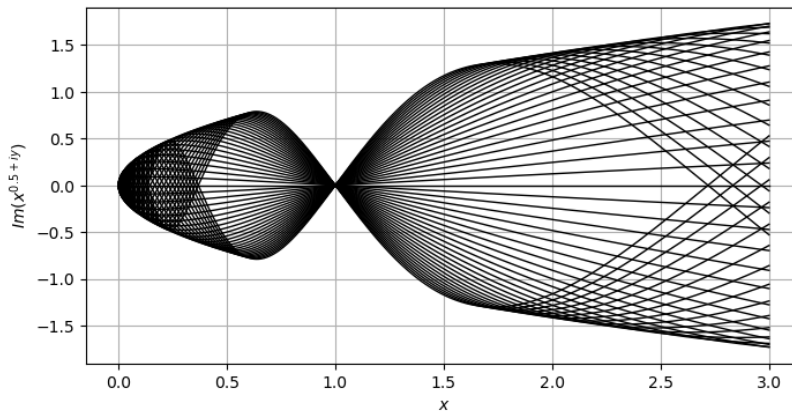


FIGURE 7 – La partie imaginaire de $x^{0.5+iy}$ où $y \in \mathbb{R}$.