

Une suite de polynômes

Marc Lorenzi

11 février 2025

1 Introduction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

Le polynôme P_n est de degré $n+1$.

n	P_n	racines
1	$(X-1)^2$	1, 1
2	$(X-1)^2(2X+1)$	1, 1, $-1/2$
3	$(X-1)^2(3X^2+2X+1)$	1, 1, $(-1 \pm i\sqrt{2})/3$

On a les deux factorisations remarquables suivantes.

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$P_n = (X-1) \left(nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \right)$$

$$P_n = (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$$

Démonstration. Réarrangeons l'expression de P_n pour écrire

$$P_n = nX^n(X-1) - (X^n - 1).$$

On en déduit la première égalité. Pour la deuxième égalité, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} (X-1) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k \\ &= \sum_{k=1}^n kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k \\ &= nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \end{aligned}$$

□

Proposition 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel 1 est racine double de P_n .*

Démonstration. C'est immédiat si $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On a $P_n(1) = 0$. De plus,

$$P'_n = n(n+1)(X^n - X^{n-1})$$

donc $P'_n(1) = 0$. Enfin,

$$P''_n = n(n+1)(nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2})$$

donc $P''_n(1) = n(n+1) \neq 0$. □

Proposition 3. *Pour tout $n \geq 2$, les racines de P_n différentes de 1 sont des racines simples.*

Démonstration. Soit $n \geq 2$. On a

$$P'_n = n(n+1)(X^n - X^{n-1}) = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

Le polynôme P'_n s'annule donc seulement en 0 et 1. Or, 0 n'est pas racine de P_n . □

2 Localisation des racines de P_n

Proposition 4. *Pour tout $n \geq 2$, les racines de P_n différentes de 1 sont de module strictement inférieur à 1.*

Démonstration. Posons

$$F = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$$

Remarquons que

$$F' = \frac{P_n}{(X-1)^2}$$

La fraction F est en fait un polynôme de degré n . Ses racines sont les racines $(n+1)$ èmes de l'unité différentes de 1. Par le théorème de Gauss-Lucas, les racines de F' sont dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{U}_{n+1} \setminus \{1\}$. l'ensemble $\mathcal{C}$ est inclus dans le disque de centre 0 et de rayon 1, et les seuls points de $\mathcal{C}$ de module 1 sont les éléments de $\mathcal{U}_{n+1} \setminus \{1\}$.

Il reste à remarquer que pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{n+1} \setminus \{1\}$,

$$P_n(\omega) = n\omega^{n+1} - (n+1)\omega^n + 1 = (n+1)\frac{\omega-1}{\omega} \neq 0$$

d'où le résultat. □

Remarque. On peut démontrer ce résultat sans utiliser le théorème de Gauss-Lucas, en se servant uniquement de l'inégalité triangulaire et de la première factorisation de P_n donnée à la proposition 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module strictement supérieur à 1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$|z^k| = |z|^k < |z|^n$$

De là,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < n|z|^n = |nz^n|$$

et donc $P_n(z) \neq 0$. Ainsi, les racines de z sont de module inférieur ou égal à 1. Supposons maintenant $|z| = 1$. Supposons que $P_n(z) = 0$. On a alors

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| = n = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k|$$

La somme des modules étant égale au module de la somme, les termes de la somme sont donc « colinéaires et de même sens ». En particulier, $z = z^1$ est colinéaire à $1 = z^0$ et de même sens. Comme $|z| = 1$, on a donc $z = 1$.

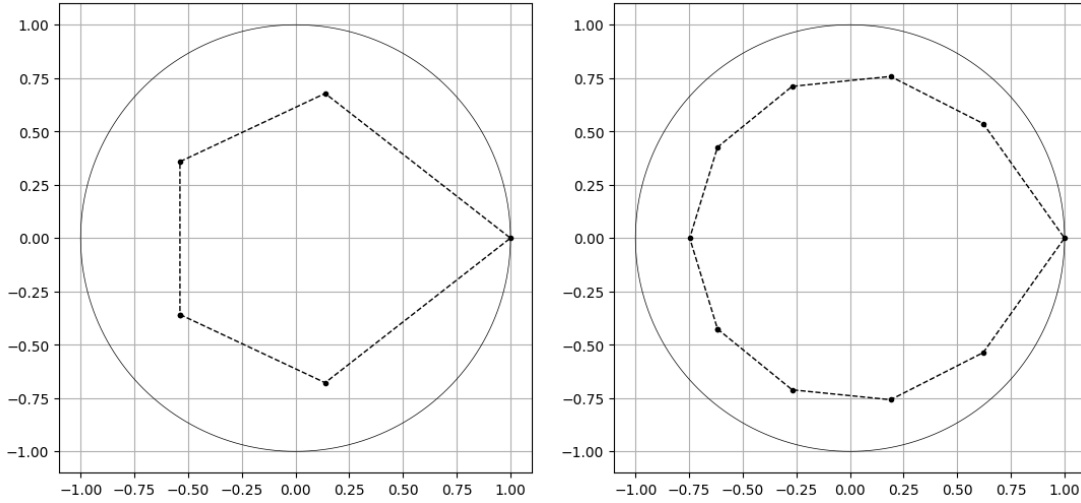


FIGURE 1 – Les racines de P_5 et P_{10}

On peut dire mieux. Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Nous allons montrer que les racines de P_n se rapprochent uniformément du cercle unité.

Proposition 5. Soit $r \in [0, 1[$. Pour tout entier n assez grand, les racines de P_n sont de module strictement supérieur à r .

Autrement dit, pour tout n assez grand, les racines de P_n autres que 1 sont dans la couronne $r < |z| < 1$.

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$,

$$|P_n(z) - 1| \leq nr^{n+1} + (n+1)r^n$$

Le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que pour tout n assez grand, $|P_n| \geq 1/2$ dans le disque fermé de centre O et de rayon r . Les racines de P_n n'appartiennent donc pas à ce disque. $\square$

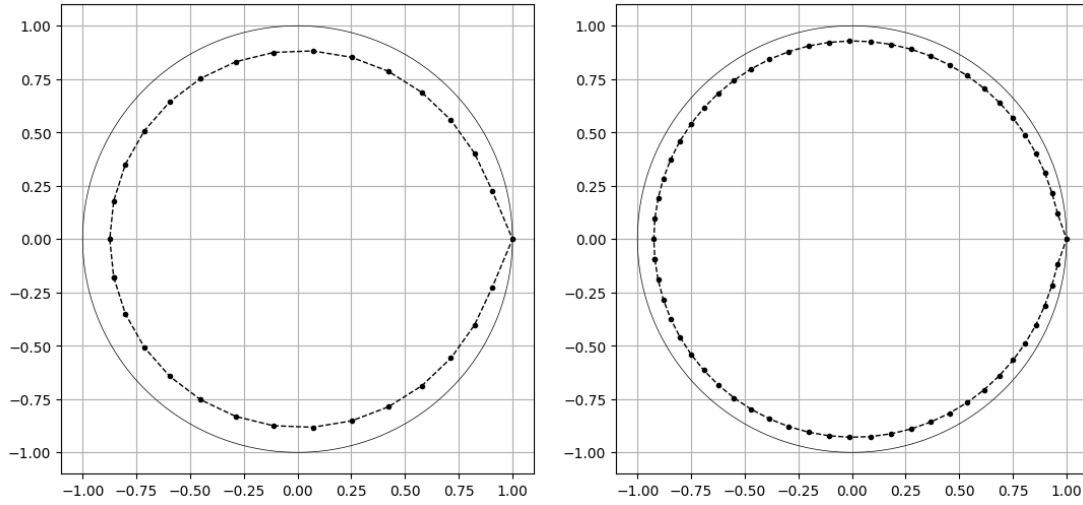


FIGURE 2 – Les racines de P_{30} et P_{60}

3 Les racines réelles

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P'_n = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

Les variations de P_n sur $\mathbb{R}$ sont donc immédiates. De plus,

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= (X-1)^2 \left(\sum_{k=0}^n (k+1)X^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k \right) \\ &= (n+1)(X-1)^2 X^n \end{aligned}$$

Les positions relatives des courbes des P_n sur $\mathbb{R}_+$ s'en déduisent. Sur $\mathbb{R}_-$, la situation est un peu plus délicate : nous verrons que pour n pair, les courbes des P_n se coupent quelque part entre -1 et 0 . Nous étudierons cela plus loin.

Si n est impair, les variations de P_n montrent que 1 est la seule racine réelle de ce polynôme. Regardons ce qui se passe lorsque n est pair. Dans ce cas, le degré de P_n est $n+1$, qui est impair.

Proposition 6. *Soit $n \geq 2$ pair. Le polynôme P_n a une unique racine réelle α_n différente de 1 .*

Démonstration. Les variations de P_n sur $\mathbb{R}$ montrent que P_n est positif sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 1 . Sur $\mathbb{R}_-$, P_n est strictement croissant. Lorsque x tend vers $-\infty$, $P_n(x)$ tend vers $-\infty$. De plus, $P_n(0) = 1 > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n s'annule sur $\mathbb{R}_-$. L'injectivité montre l'unicité de la racine. $\square$

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons α_n l'unique racine de P_{2n} différente de 1 .

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_{2n}(x) < 0$ si et seulement si $x < \alpha_n$.

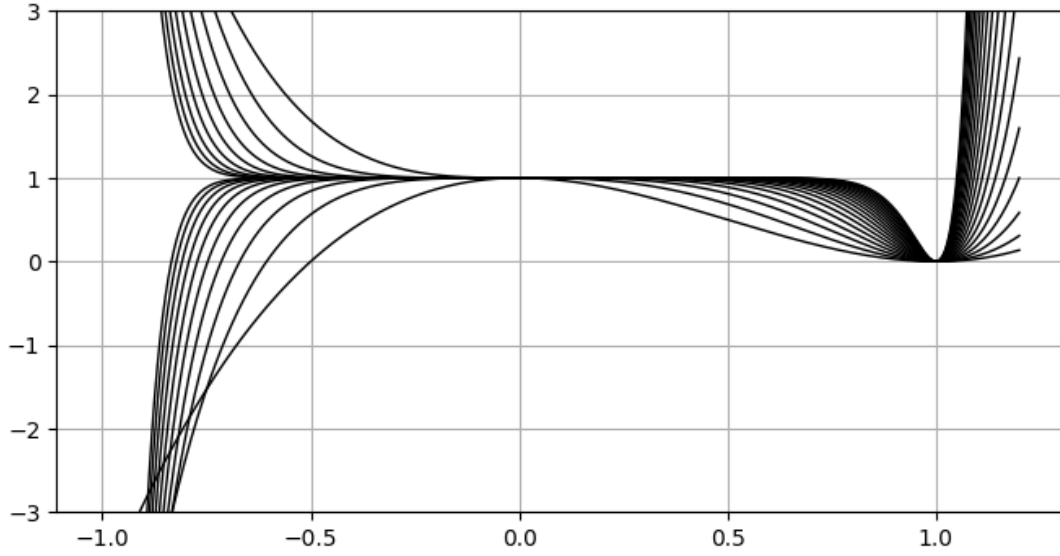


FIGURE 3 – Les polynômes P_n sur $\mathbb{R}$

Proposition 7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in]-1, -1/2]$.*

Démonstration. Par la proposition 4, $|\alpha_n| < 1$ et donc $-1 < \alpha_n$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2n\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - (2n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1 \\ &= -\frac{n}{2^{2n}} - \frac{2n+1}{2^{2n}} + 1 \\ &= 1 - \frac{n+1}{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

Une récurrence facile sur n montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{2n-1} \geq n+1$. Ainsi, $P_{2n}(-1/2) \geq 0$. On en déduit que $\alpha_n \leq -1/2$. $\square$

Proposition 8. *α_n tend vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propositions 4 et 5 $\square$

La figure ci-dessus semble indiquer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Commençons par un lemme.

Lemme 9. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < 2$$

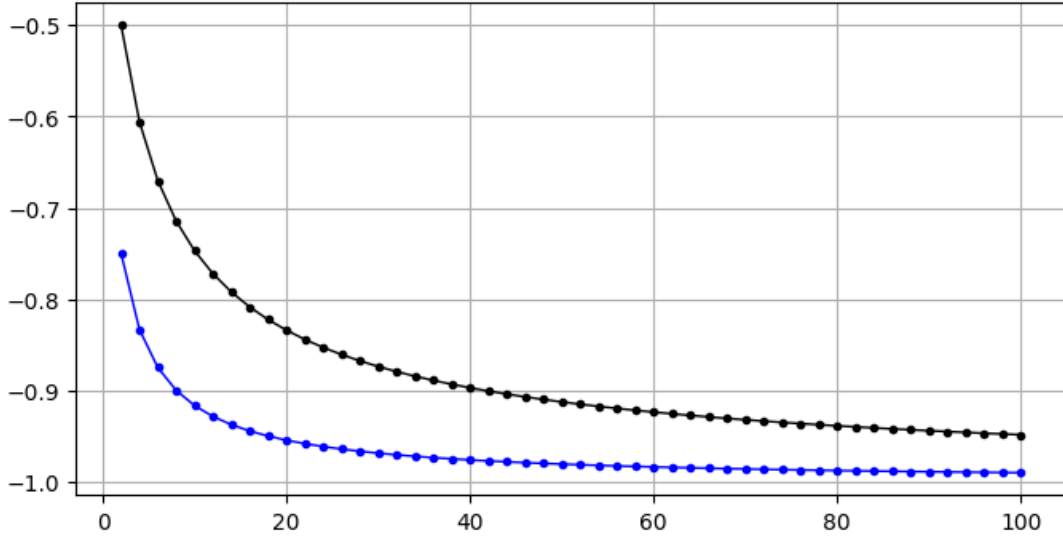


FIGURE 4 – En noir, les α_n . En bleu, $-(2n+1)/(2n+2)$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2(x+1) - x(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction f' est donc strictement croissante. Lorsque x tend vers $+\infty$, $f'(x)$ tend vers 0. Ainsi, $f' < 0$ et donc f est strictement décroissante. Or, $f(1) = \ln 2$. On a donc pour tout $x > 1$, $f(x) < \ln 2$. De là, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = e^{f(n)} < 2$$

□

Proposition 10. *La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utilisons la deuxième factorisation de la proposition 1 pour écrire

$$\begin{aligned} P_{2n+2} - P_{2n} &= (X-1)^2 \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)X^k - \sum_{k=0}^{2n-1} (k+1)X^k \right) \\ &= (X-1)^2 ((2n+1)X^{2n} + (2n+2)X^{2n+1}) \\ &= (X-1)^2 X^{2n} ((2n+1) + (2n+2)X) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_{2n+2}(x) > P_{2n}(x)$ si et seulement si

$$x > -\frac{2n+1}{2n+2}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P_{2n} \left(-\frac{2n+1}{2n+2} \right) &= -2n \frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n+2)^{2n+1}} - (2n+1) \frac{(2n+1)^{2n}}{(2n+2)^{2n}} + 1 \\ &= 1 - 2 \frac{(2n+1)^{2n+2}}{(2n+2)^{2n+1}} \end{aligned}$$

Par le lemme 9, ce réel est strictement négatif. Par la remarque faite un peu plus haut, on en déduit

$$\alpha_n > -\frac{2n+1}{2n+2}$$

De là,

$$P_{2n+2}(\alpha_n) > P_{2n}(\alpha_n) = 0$$

Toujours par la remarque faite plus haut, appliquée cette fois ci au polynôme P_{2n+2} , on a donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. $\square$