

Dimension et cardinal d'un espace vectoriel

Marc Lorenzi

12 mars 2025

1 Dimension

1.1 Bref rappel sur les cardinaux

Nous allons travailler dans ce qui suit avec des cardinaux infinis. Deux ensembles A et B (finis ou infinis) ont le *même cardinal* lorsqu'il existe une bijection de A sur B . Définir ce qu'est le cardinal d'un ensemble A est plus délicat et nous ne le ferons pas. Informellement, parmi tous les ensembles en bijection avec A , il y en a un plus « intéressant » que les autres. C'est cet ensemble que nous appelons le cardinal de A . Pour prendre l'exemple des ensembles finis, si A est un ensemble fini, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que A soit en bijection avec $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Le cardinal de A est justement cet ensemble. Évidemment, dans le cadre des ensembles finis, on simplifie en disant que le cardinal de A est l'entier n .

Pour tout ensemble A , nous noterons $\text{card } A$ le cardinal de A . Le plus petit cardinal infini est

$$\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

Il est possible de définir sur les cardinaux des opérations d'addition, de multiplication et d'exponentiation. On peut même effectuer des sommes ou des produits d'un nombre quelconque de cardinaux. Retenons simplement les quelques résultats ci-dessous.

Pour tous ensembles A et B ,

$$\text{card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{card } B$$

$$\text{card}(A^B) = (\text{card } A)^{\text{card } B}$$

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} \text{card } A_i$$

Dans le cas où les A_i sont disjoints deux à deux, on a égalité. Si $\mathfrak{a}$ est un cardinal et pour tout $i \in I$, $|A_i| \leq \mathfrak{a}$, alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \mathfrak{a} \text{ card } I$$

Le cardinal de $\mathbb{R}$ est

$$\text{card } \mathbb{R} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

L'addition et la multiplication des cardinaux sont commutatives et associatives. Un théorème non trivial affirme que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux cardinaux non nuls dont l'un au moins est infini, alors

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

Une simple récurrence sur n montre alors que si $\mathfrak{a}$ est un cardinal infini, alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$$

On peut également prouver que si E est un ensemble infini, alors l'ensemble $\mathcal{P}_f(E)$ des parties finies de E est lui aussi infini et

$$\text{card } \mathcal{P}_f(E) = \text{card } E$$

1.2 Existence de bases

Il est bien connu que tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases, et que toutes les bases sont de même cardinal. Nous allons montrer que ces résultats restent vrais en dimension infinie. Pour montrer l'existence de bases, nous aurons besoin du *lemme de Zorn*, que nous admettons. Le lemme de Zorn est équivalent à l'axiome du choix.

Théorème 1. [ZORN] *Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné non vide. On suppose que toute partie de A totalement ordonnée possède un majorant. Alors, A possède un élément maximal.*

De façon plus explicite, l'hypothèse du lemme de Zorn signifie

$$\forall C \subseteq A, C \text{ totalement ordonné} \implies \exists a \in A, \forall x \in C, x \leq a$$

La conclusion du lemme de Zorn est

$$\exists m \in A, \forall x \in A, m \leq x \implies m = x$$

Dans la suite, au lieu de parler de *familles* de vecteurs de E , nous considérerons plutôt des *ensembles* de vecteurs de E . Nous parlerons donc d'ensembles libres et d'ensembles générateurs.

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient L_0 un ensemble libre et G_0 un ensemble générateur de vecteurs de E . Il existe une base B de E telle que*

$$L_0 \subseteq B \subseteq G'_0 = L_0 \cup G_0$$

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{L}$ des ensembles libres de vecteurs de E contenant L_0 et inclus dans G'_0 .

$$\mathcal{L} = \{F : F \subseteq E, F \text{ libre}, L_0 \subseteq F \subseteq G'_0\}$$

On ordonne $\mathcal{L}$ par la relation d'inclusion. L'ensemble L_0 appartient à $\mathcal{L}$ donc $\mathcal{L}$ est non vide.

Soit C une partie de $\mathcal{L}$ totalement ordonnée. Soit L la réunion des éléments de C . Clairement, $L_0 \subseteq L \subseteq G'_0$. Soient $x_1, \dots, x_n \in L$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Il existe $L_1, \dots, L_n \in C$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in L_i$. L'ensemble C étant totalement ordonné, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i \subseteq L_k$. Les x_i appartiennent donc tous à L_k . Or, L_k est libre, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi, L est libre, c'est à dire $L \in \mathcal{L}$. Nous venons de montrer que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{L}$ possède un majorant. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{L}$ possède un élément maximal B .

Montrons que B est une base de E . L'ensemble B est libre, puisque $B \in \mathcal{L}$. Soit $x \in G'_0$. Si $x \in B$, alors x est évidemment combinaison linéaire de B . Supposons que $x \notin B$ et considérons $B' = B \cup \{x\}$. On a $B \subset B'$ et cette inclusion est stricte. De plus, $L_0 \subseteq B' \subseteq G'_0$. Par la maximalité de B , l'ensemble B' est lié. Il existe donc une combinaison linéaire des vecteurs de B' qui est nulle, mais dont l'un des coefficients est non nul. Le coefficient de x n'est pas nul, sinon on obtiendrait une combinaison linéaire nulle de l'ensemble libre B à coefficients pas tous nuls. De là, x est combinaison linéaire de B . Ainsi, tout vecteur de G'_0 est combinaison linéaire de B , c'est à dire

$$G'_0 \subseteq \text{Vect}(B)$$

Comme G'_0 est générateur, on en déduit

$$E = \text{Vect}(G'_0) \subseteq \text{Vect}(\text{Vect}(B)) = \text{Vect}(B) \subseteq E$$

et donc $\text{Vect}(B) = E$. Ainsi, l'ensemble B est générateur. $\square$

Proposition 3. *Tout espace vectoriel possède des bases.*

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble $\emptyset$ est libre et l'ensemble E est générateur. La proposition 2 appliquée à ces deux ensembles montre l'existence d'une base de E . $\square$

Remarque. Nous avons utilisé le lemme de Zorn, et donc l'axiome du choix, pour notre démonstration. En notant $\exists B$ la proposition précédente et AC l'axiome du choix, on peut en fait montrer que $AC \iff \exists B$. L'axiome du choix *suffit* donc à prouver la proposition 2 mais, d'une certaine façon, il est *nécessaire* à la preuve.

1.3 Dimension

Proposition 4. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Toutes les bases de E ont le même cardinal.*

Démonstration. Le résultat est bien connu si E est de dimension finie. Supposons donc que E est de dimension infinie, c'est à dire que tous les ensembles générateurs de E sont des ensembles infinis. Soient B et B' deux bases de E .

Pour tout $x \in B'$, x est combinaison linéaire de vecteurs de B . On a donc

$$x = \sum_{e \in A_x} \lambda_e e$$

où les λ_e appartiennent à $\mathbb{K}$ et A_x est une partie finie de B . La clé de la preuve est que

$$\bigcup_{x \in B'} A_x = B$$

En effet, supposons un court instant que cette réunion est un ensemble $C \subsetneq B$. Soit $e \in B \setminus C$. Comme B' est générateur, le vecteur e est combinaison linéaire de B' . Il est donc aussi combinaison linéaire des vecteurs de C . Contradiction, puisque B est libre.

Pour terminer,

$$|B| = \left| \bigcup_{x \in B'} A_x \right| \leq \sum_{x \in B'} |A_x| \leq \aleph_0 |B'| = |B'|$$

car $|B'|$ est infini, et donc supérieur ou égal à $\aleph_0$. De là même façon, $|B'| \leq |B|$ et finalement, par le théorème de Schröder-Bernstein, $|B| = |B'|$. $\square$

Remarque. La preuve de ce résultat en dimension finie est assez différente. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, on montre d'abord par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout ensemble de $n + 1$ vecteurs combinaisons linéaires de n autres vecteurs est lié. On en déduit que si G est un ensemble générateur fini de E , alors les ensembles libres de E sont finis, de cardinal inférieur ou égal au cardinal de G . De là, les bases de E sont des ensembles finis, car elles sont libres. Si B et B' sont deux bases de E , comme B est libre et B' est génératrice, on a $|B| \leq |B'|$. En inversant les rôles de B et B' , on obtient $|B'| \leq |B|$, d'où l'égalité des cardinaux.

Il est donc possible de définir la *dimension* d'un espace vectoriel E . Cette dimension est un entier naturel si E est de dimension finie, et un cardinal transfini sinon.

Définition 1. La *dimension* $\dim E$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est le cardinal commun de ses bases.

Proposition 5. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tout ensemble libre L de vecteurs de E et tout ensemble générateur G de vecteurs de E ,

$$|L| \leq \dim E \leq |G|$$

Démonstration. Soit L un ensemble libre de vecteurs de E . Appliquons la proposition 2 à $L_0 = L$ et $G_0 = E$ pour obtenir qu'il existe une base B de E telle que

$$L \subseteq B \subseteq E = L \cup E$$

De là, $|L| \leq |B| = \dim E$.

Soit G un ensemble générateur de vecteurs de E . Appliquons la proposition 2 à $L_0 = \emptyset$ et $G_0 = G$ pour obtenir qu'il existe une base B de E telle que

$$\emptyset \subseteq B \subseteq G = \emptyset \cup G$$

De là, $\dim E = |B| \leq |G|$. $\square$

Remarque. Il est bien connu que si E est de dimension finie, un ensemble libre L de vecteurs de E tel que $|L| = \dim E$ est une base de E . Ce n'est plus le cas en dimension

infinie. Prenons par exemple $E = \mathbb{K}[X]$. L'ensemble $B = \{X^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de E , donc

$$\dim E = |B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Soit $L = \{X^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble L est libre et

$$|L| = \aleph_0 = \dim E$$

Pourtant, $X \notin \text{Vect}(L)$ donc L n'est pas générateur.

Ceci est en fait vrai dans tous les espaces vectoriels de dimension infinie.

Proposition 6. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie. Il existe un ensemble libre L de vecteurs de E tel que $|L| = \dim E$ et $\text{Vect}(L) \neq E$.*

Démonstration. Soit B une base de E . Soit $e \in B$. Prenons $L = B \setminus \{e\}$. L'ensemble L , sous-ensemble d'un ensemble libre, est libre. Comme B est infini, $|L| = |B| = \dim E$. Pourtant, L n'est pas libre maximal, donc L n'est pas une base de E . $\square$

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie. Il existe un ensemble générateur G de vecteurs de E tel que $|G| = \dim E$ et G est lié.*

Démonstration. Soit B une base de E . Prenons $G = B \cup \{0\}$. L'ensemble G , sur-ensemble d'un ensemble générateur, est générateur. Comme B est infini, $|G| = |B| = \dim E$. Pourtant, G est lié puisqu'il contient le vecteur nul. $\square$

2 Dimension et cardinal

Y a-t-il une relation entre la *dimension* d'un espace vectoriel et son *cardinal*? La réponse est oui. Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 8. *Si E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de cardinal infini, alors*

$$\text{card } E = \max(\dim E, |\mathbb{K}|)$$

2.1 Espaces de dimension finie

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$.*

- *Si $\mathbb{K}$ est fini alors E est fini et $\text{card } E = (\text{card } \mathbb{K})^n$.*
- *Si $\mathbb{K}$ est infini et $n \geq 1$, alors E est infini et $\text{card } E = \text{card } \mathbb{K}$.*

Nous obtenons bien le résultat annoncé : E est un ensemble infini, alors nous sommes dans le second cas et $\text{card } E = \text{card } \mathbb{K} = \max(\dim(E), \text{card } \mathbb{K})$.

Démonstration. L'espace vectoriel E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. On a donc

$$\text{card } E = \text{card}(\mathbb{K}^n) = (\text{card } \mathbb{K})^n$$

d'où le résultat. $\square$

2.2 Espaces de dimension infinie

Lemme 10. *Soit E un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps $\mathbb{K}$. Il existe un ensemble infini I de cardinal $\dim E$ tel que*

$$\text{card } E = \sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} (\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J}$$

Démonstration. En réalité, la propriété est vraie pour *tout* ensemble fini de cardinal $\dim E$, mais l'existence nous suffira.

Donnons nous une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de E . L'ensemble I des indices est infini, de cardinal $\text{card } I = \dim E$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i$$

où les $x_i \in \mathbb{K}$ sont tous nuls sauf un nombre fini. Appelons *support* de x l'ensemble

$$\sigma(x) = \{i \in I : x_i \neq 0\}$$

Considérons l'application f définie pour tout $x \in E$ par

$$f(x) = (x_i)_{i \in \sigma(x)}$$

L'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble

$$F = \bigcup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} (\mathbb{K}^*)^J$$

L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective. Sa réciproque f^{-1} est définie pour toute famille $(x_i)_{i \in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}^*$, où J est une partie finie de I , par

$$f^{-1}((x_i)_{i \in J}) = \sum_{i \in J} x_i e_i$$

La bijectivité de f entraîne $\text{card } E = \text{card } F$.

La réunion qui définit F est disjointe. On a donc

$$\text{card } E = \text{card } F = \sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \text{card}((\mathbb{K}^*)^J) = \sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} (\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J}$$

□

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps $\mathbb{K}$. On a*

$$\text{card } E = \max(\dim E, \text{card } \mathbb{K})$$

Démonstration. Nous allons distinguer deux cas.

- Cas 1, $\mathbb{K}$ est infini. On a pour tout ensemble J fini

$$(\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J} = \text{card } \mathbb{K}^* = \text{card } \mathbb{K}$$

De là, par le lemme 10,

$$\begin{aligned}
\text{card } E &= \sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \text{card } \mathbb{K} \\
&= \text{card } \mathcal{P}_f(I) \times \text{card } \mathbb{K} \\
&= \text{card } I \times \text{card } \mathbb{K} \\
&= \max(\text{card } I, \text{card } \mathbb{K})
\end{aligned}$$

- Cas 2, $\mathbb{K}$ est un corps fini. Pour tout ensemble J fini,

$$1 \leq (\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J} < \aleph_0$$

De là,

$$\sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} (\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J} \leq \aleph_0 \times \text{card } \mathcal{P}_f(I) = \aleph_0 \times \text{card } I = \text{card } I$$

et aussi

$$\sum_{J \in \mathcal{P}_f(I)} (\text{card } \mathbb{K}^*)^{\text{card } J} \geq \text{card } \mathcal{P}_f(I) = \text{card } I$$

Ainsi, $\text{card } E = \text{card } I = \dim E$, d'où le résultat puisque $\text{card } \mathbb{K} < \aleph_0 \leq \text{card } I$. $\square$

3 Premiers exemples

3.1 Exemples faciles

Rappelons la notation

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \text{card } \mathbb{R}$$

Les corps « classiques » sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On a $\text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$. De là, si E est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$, alors $\text{card } E = \dim E$.

Si E est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, deux cas se présentent.

- Si $\dim E < \mathfrak{c}$, alors $\text{card } E = \mathfrak{c} > \dim E$.
- Si $\dim E \geq \mathfrak{c}$, alors $\text{card } E = \dim E$.

Remarquons que l'existence de cardinaux $\mathfrak{a}$ tels que $\aleph_0 < \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ est l'*hypothèse du continu*. Autrement dit, un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel « non pathologique » de dimension infinie strictement inférieure à $\mathfrak{c}$ est forcément de dimension dénombrable $\aleph_0$.

Commençons par trois exemples simples : les polynômes, les fractions rationnelles et les fonctions de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$.

Proposition 12. $\dim \mathbb{K}[X] = \aleph_0$ et $\text{card } \mathbb{K}[X] = \max(\aleph_0, \text{card } \mathbb{K})$.

Démonstration. La famille $\mathcal{B} = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On a donc

$$\dim \mathbb{K}[X] = \text{card } \mathcal{B} = \text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

De là, par le théorème 8,

$$\text{card } \mathbb{K}[X] = \max(\dim \mathbb{K}[X], \text{card } \mathbb{K}) = \max(\aleph_0, \text{card } \mathbb{K})$$

d'où le résultat. $\square$

Passons aux fractions rationnelles.

Proposition 13. $\text{card } \mathbb{K}(X) = \dim \mathbb{K}(X) = \text{card } \mathbb{K}[X] = \max(\aleph_0, \text{card } \mathbb{K})$.

On a donc $\text{card } \mathbb{K}(X) = \text{card } \mathbb{K}[X]$. En revanche, si $\mathbb{K}$ est un corps infini, la dimension de $\mathbb{K}(X)$ est strictement plus grande que celle de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - a_k} = 0$$

Supposons un court instant qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_j \neq 0$. On a alors

$$\frac{\lambda_j}{X - a_j} = - \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k}{X - a_k}$$

La fraction du membre de gauche possède a_j pour pôle, alors que ce n'est pas le cas pour celle du membre de droite, contradiction. Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (1/(X - a))_{a \in \mathbb{K}}$ est libre. On en déduit que

$$\dim \mathbb{K}(X) \geq \text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathbb{K}$$

L'application $(P, Q) \mapsto P/Q$ est une surjection de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ sur $\mathbb{K}(X)$. On en déduit que

$$\text{card } \mathbb{K}(X) \leq \text{card}(\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*) = \text{card } \mathbb{K}[X] \times \text{card } \mathbb{K}[X]^* = \text{card } \mathbb{K}[X]^2 = \text{card } \mathbb{K}[X]$$

De plus, $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}(X)$, donc

$$\text{card } \mathbb{K}[X] \leq \text{card } \mathbb{K}(X)$$

Ainsi,

$$\text{card } \mathbb{K}(X) = \text{card } \mathbb{K}[X]$$

Enfin, en utilisant le théorème 8 et le fait que $\dim \mathbb{K}(X) \geq \text{card } \mathbb{K}$,

$$\text{card } \mathbb{K}(X) = \max(\dim \mathbb{K}(X), \text{card } \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}(X)$$

d'où le résultat. $\square$

Considérons enfin l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal n , on a évidemment $\text{card } \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = n^n$ et $\dim \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = n$. Le cas intéressant est celui où $\mathbb{K}$ est infini.

Proposition 14. *Si $\mathbb{K}$ est un corps infini, alors $\text{card } \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = \dim \mathbb{K}^{\mathbb{K}} = 2^{\text{card } \mathbb{K}}$.*

Démonstration. Posons $\kappa = \text{card } \mathbb{K}$. On a

$$2 \leq \kappa < 2^\kappa$$

Comme $\kappa \geq \aleph_0$, on a $\kappa^2 = \kappa$ et donc

$$2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa^2} = 2^\kappa$$

d'où $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. Ainsi,

$$\text{card } \mathbb{K}^\mathbb{K} = (\text{card } \mathbb{K})^{\text{card } \mathbb{K}} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$$

De là, par le théorème 8,

$$2^{\text{card } \mathbb{K}} = \text{card } \mathbb{K}^\mathbb{K} = \max(\dim \mathbb{K}^\mathbb{K}, \text{card } \mathbb{K})$$

Par le théorème de Cantor,

$$\text{card } \mathbb{K} < 2^{\text{card } \mathbb{K}}$$

et donc le max ci-dessus est égal à $\dim \mathbb{K}^\mathbb{K}$. $\square$

3.2 Fonctions continues

En imposant de la régularité aux fonctions, on diminue drastiquement le cardinal et la dimension des espaces vectoriels. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Lemme 15. *L'application $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ est une injection de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Supposons que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. La continuité de f et g en x entraîne, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, l'égalité $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$. $\square$

Proposition 16. $\text{card } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Démonstration. L'injection de la proposition précédente montre que

$$\text{card } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \leq \text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = (\text{card } \mathbb{R})^{\text{card } \mathbb{Q}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

De plus, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui à tout réel λ associe la fonction $x \mapsto \lambda x$ est injective, donc

$$\mathfrak{c} = \text{card } \mathbb{R} \leq \text{card } \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

On en déduit le résultat par le théorème de Schröder-Bernstein. $\square$

Lemme 17. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_a : x \mapsto e^{ax}$. La famille $\mathcal{F} = (\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous réels $a_1, \dots, a_n$ distincts deux à deux, la famille $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

C'est immédiat pour $n = 0$ puisque la famille vide est libre. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour n . Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels distincts deux à deux. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$. Supposons

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \varphi_{a_k} = 0$$

En dérivant, on obtient

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k \varphi_{a_k} = 0$$

La combinaison $a_{n+1} \times (1) - (2)$ élimine $\varphi_{a_{n+1}}$ et donne

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (a_{n+1} - a_k) \varphi_{a_k} = 0$$

Par l'hypothèse de récurrence, la famille $(\varphi_{a_i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre. On a donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lambda_k (a_{n+1} - a_k) = 0$$

Comme $a_k \neq a_{n+1}$, on en déduit $\lambda_k = 0$. Il reste à reporter dans (1) pour obtenir

$$\lambda_{n+1} \varphi_{a_{n+1}} = 0$$

La fonction $\varphi_{a_{n+1}}$ n'est pas nulle, donc $\lambda_{n+1} = 0$. $\square$

Proposition 18. $\dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Démonstration. En reprenant les notations du lemme précédent, la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On a donc

$$\dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \geq \text{card } \mathcal{F} = \mathfrak{c}$$

De plus,

$$\dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \leq \text{card } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$$

d'où l'égalité. $\square$

Remarque. La même démonstration prouve que pour tout $n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket$,

$$\text{card } \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$$

3.3 Suites réelles

Nous considérons dans ce paragraphe l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

Proposition 19. $\text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$

Démonstration. On a

$$\text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = (\text{card } \mathbb{R})^{\text{card } \mathbb{N}} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

□

Lemme 20. *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, soit $\gamma_c = (c^n)_{n \in \mathbb{N}}$. La famille $\mathcal{F} = (\gamma_c)_{c \in \mathbb{R}}$ est libre.*

Démonstration. Prouvons par récurrence sur N que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tous $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux, la famille $(\gamma_{c_1}, \dots, \gamma_{c_N})$ est libre. C'est clair pour $N = 0$. Soit $N \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour $N - 1$. Soient $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$. Supposons

$$(0) \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k \gamma_{c_k} = 0$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^n = 0$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2) \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^{n+1} = 0$$

En multipliant par c_N , il vient

$$(3) \quad \sum_{k=1}^N \lambda_k c_N c_k^n = 0$$

La combinaison (2) – (3) élimine c_N . Il reste, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k (c_k - c_N) c_k^n = 0$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k (c_k - c_N) \gamma_{c_k} = 0$$

Par l'hypothèse de récurrence, la famille $(\gamma_{c_1}, \dots, \gamma_{c_{N-1}})$ est libre. On a donc pour tout $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $\lambda_k (c_k - c_N) = 0$. Comme $c_k \neq c_N$, $\lambda_0 = \dots = \lambda_{N-1} = 0$. En reportant dans (0), on obtient $\lambda_N \gamma_{c_N} = 0$. Comme la suite γ_{c_N} n'est pas la suite nulle (son premier terme est égal à 1), il vient $\lambda_N = 0$. La famille $(\gamma_{c_1}, \dots, \gamma_{c_N})$ est donc libre. □

Proposition 21. $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. La famille $\mathcal{F}$ de la proposition précédente est libre, donc

$$\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \geq \text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

De plus,

$$\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \leq \text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$$

d'où l'égalité. □

3.4 Suites réelles convergentes

Notons $\mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles convergentes.

Proposition 22. $\text{card } \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} = \dim \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Reprenons les notations du lemme 20. La famille $\mathcal{F}' = (\gamma_c)_{c \in]-1,1[}$, sous-famille d'une famille libre, est une famille libre de $\mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$. On a donc

$$\dim \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} \geq \text{card } \mathcal{F}' = \mathfrak{c}$$

De plus, $\mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc

$$\dim \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} \leq \dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$$

On a donc $\dim \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$. De là,

$$\mathfrak{c} = \dim \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} \leq \text{card } \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} \leq \text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$$

donc $\text{card } \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$. $\square$

4 Les espaces ℓ^p et L^p

4.1 Les espaces $\ell^p(\mathbb{R})$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^p(\mathbb{R})$ lorsque la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p$$

est convergente. On définit également $\ell^{\infty}(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des suites réelles bornées. Les ensembles $\ell^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels (nous ne le montrons pas ici).

Proposition 23. Pour tout $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,

$$\text{card } \ell^p(\mathbb{R}) = \dim \ell^p(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$$

Démonstration. On a $\ell^p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc

$$\text{card } \ell^p(\mathbb{R}) \leq \text{card } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$$

Pour tout $c \in]1,1[$, la suite γ_c appartient à $\ell^p(\mathbb{R})$. En effet, cette suite est bornée puisqu'elle tend vers 0. Elle appartient donc à $\ell^{\infty}(\mathbb{R})$. Et si $p < \infty$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c^n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} (|c|^p)^n = \frac{1}{1 - |c|^p}$$

La famille $\mathcal{F} = (\gamma_c)_{c \in]-1,1[}$ est une famille libre de $\ell^p(\mathbb{R})$, donc

$$\dim \ell^p(\mathbb{R}) \geq \text{card } \mathcal{F} = \text{card }]-1,1[= \mathfrak{c}$$

Ainsi,

$$\mathfrak{c} \leq \dim \ell^p(\mathbb{R}) \leq \text{card } \ell^p(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c}$$

d'où le résultat. $\square$

4.2 Les espaces $L^p(\mathbb{R})$, $p < \infty$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $L^p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $|f|^p$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, on identifie deux fonctions égales presque partout. $L^p(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'application

$$f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p \right)^{1/p}$$

est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$. En particulier, $L^p(\mathbb{R})$ est un espace métrique pour la distance $(f, g) \mapsto \|f - g\|_p$.

Nous admettrons ici que l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est un espace métrique *séparable*, c'est à dire qu'il existe une partie dénombrable de $L^p(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 24. *Si E un espace métrique séparable, alors $\text{card } E \leq \mathfrak{c}$.*

Démonstration. Soit A une partie dénombrable dense de E . Soit $A_c^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites convergentes de points de A . Considérons l'application $\Phi : A_c^{\mathbb{N}} \rightarrow E$ définie par $\Phi(u) = \lim u$. Comme A est dense dans E , l'application Φ est surjective. De là,

$$\text{card } E \leq \text{card } A_c^{\mathbb{N}} \leq \text{card } A^{\mathbb{N}} = (\text{card } A)^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

□

On en déduit une majoration du cardinal de $L^p(\mathbb{R})$.

Lemme 25. $\text{card } L^p(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c}$.

Donnons maintenant une minoration de la dimension de $L^p(\mathbb{R})$.

Lemme 26. $\dim L^p(\mathbb{R}) \geq \mathfrak{c}$.

Démonstration. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_a(x) = e^{-ax^2}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction φ_a appartient à $L^p(\mathbb{R})$. De plus, elle est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'_a(x) = -2ax\varphi_a(x)$$

Une preuve analogue à celle de la proposition 10 montre alors que la famille $\mathcal{F} = (\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ est libre. On en déduit

$$\dim L^p(\mathbb{R}) \geq \text{card } \mathcal{F} = \text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

□

Proposition 27. $\text{card } L^p(\mathbb{R}) = \dim L^p(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Démonstration. Par les deux lemmes précédents,

$$\mathfrak{c} \leq \dim L^p(\mathbb{R}) \leq \text{card } L^p(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c}$$

d'où le résultat. □

4.3 L'espace $L^\infty(\mathbb{R})$

$L^\infty(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *essentiellement bornées*, c'est à dire telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq M$ presque partout. Comme dans le cas des espaces L^p où $p \in \mathbb{N}^*$, on identifie les fonctions égales presque partout. L'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, soit φ_a la fonction indicatrice du segment $[-a, a]$. Les fonctions φ_a appartiennent clairement à $L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{F} = (\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$.

Lemme 28. $\dim L^\infty(\mathbb{R}) \geq \mathfrak{c}$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous réels $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ distincts deux à deux, la famille $(\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n})$ est libre. C'est immédiat si $n = 0$ (famille vide). Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ distincts deux à deux. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{a_k} = 0$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que pour tout $k \neq j$, $a_k < a_j$. On a donc pour tout $k \neq j$, $\varphi_{a_k}(a_j) = 0$, et $\varphi_{a_j}(a_j) = 1$. En évaluant (1) en a_j , on obtient donc $\lambda_j = 0$, d'où

$$\sum_{k \neq j} \lambda_k \varphi_{a_k} = 0$$

Par l'hypothèse de récurrence, la famille $(\varphi_{a_k})_{k \neq j}$ est libre. De là, pour tout $k \neq j$, $\lambda_k = 0$.

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre, donc

$$\dim L^\infty(\mathbb{R}) \geq \text{card } \mathcal{F} = \mathfrak{c}$$

□

Lemme 29. $\text{card } L^\infty(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c}$.

Il s'avère que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable. Nous ne pouvons donc pas reprendre la preuve donnée pour les espaces $L^p(\mathbb{R})$, où $p < \infty$. En revanche, nous pouvons nous *ramener* à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, dont nous connaissons déjà le cardinal.

Démonstration. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\Phi_n(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi_n(f)(x) = f(x)$ si $x \in [n, n+1[$ et $\Phi_n(f)(x) = 0$ sinon. Comme f est essentiellement bornée sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[n, n+1[$, la fonction $\Phi_n(f)$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $\Phi : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow (L^1(\mathbb{R}))^\mathbb{Z}$, par

$$\Phi(f) = (\Phi_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$$

La fonction Φ est injective, donc

$$\text{card } L^\infty(\mathbb{R}) \leq \text{card}(L^1(\mathbb{R}))^\mathbb{Z} = (\text{card } L^1(\mathbb{R}))^{\text{card } \mathbb{Z}} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

□

Proposition 30. $\text{card } L^\infty(\mathbb{R}) = \dim L^\infty(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents. $\square$

5 Dual

5.1 Cardinal et dimension du dual

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, le *dual* E^* de E est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E . Classiquement, si E est de dimension finie, alors E^* est un espace vectoriel isomorphe à E , donc $\text{card } E^* = \text{card } E$ et $\dim E^* = \dim E$.

Si E est de dimension infinie, la situation est plus intéressante.

Théorème 31. *Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie, alors*

$$\text{card } E^* = \dim E^* = (\text{card } \mathbb{K})^{\dim E}$$

Ce résultat a deux corollaires immédiats.

Corollaire 32. *Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie, alors les espaces vectoriels E et E^* ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Remarquons que $\text{card } \mathbb{K} \geq 2$. Par le théorème de Cantor,

$$\dim E^* \geq 2^{\dim E} > \dim E$$

Les espaces vectoriels E et E^* ne sont ainsi pas isomorphes.

En fait, les ensembles E et E^* ne sont même pas en bijection, puisqu'ils n'ont pas le même cardinal. $\square$

Corollaire 33. *Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors*

$$\text{card } E^* = \dim E^* = 2^{\dim E}$$

Démonstration. En effet, $\aleph_0 \leq \text{card } \mathbb{K} \leq \mathfrak{c}$. On a donc

$$\dim E^* \leq \mathfrak{c}^{\dim E} = 2^{\aleph_0 \dim E} = 2^{\dim E}$$

et aussi

$$\dim E^* \geq \aleph_0^{\dim E} \geq 2^{\dim E}$$

d'où

$$\text{card } E^* = \dim E^* = 2^{\dim E}$$

$\square$

Pour montrer le théorème, nous allons procéder en plusieurs étapes. Dans les lemmes qui suivent, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie.

Lemme 34. $\dim E \leq \dim E^*$. En particulier, E^* est de dimension infinie.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour tout $i \in I$, soit $e_i^* \in E^*$ définie, pour tout $j \in I$, par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$. Supposons que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i^* = 0$$

Soit $j \in I$. On a

$$0 = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i^*(e_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une famille libre de E^* . On en déduit que

$$\dim E^* \geq \text{card } \mathcal{B}^* = \dim E$$

□

Lemme 35. $\text{card } \mathbb{K} \leq \dim E^*$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille libre dénombrable de vecteurs de E . Complétons $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de l'espace E . Pour tout $c \in \mathbb{K}$, soit $\varphi_c \in E^*$ définie comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_c(e_n) = c^n$$

Puis, pour tout $i \in I \setminus \mathbb{N}$, $\varphi_c(e_i) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $c_0, \dots, c_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_{c_k} = 0$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_{c_k}(e_j) = \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k^j$$

Matriciellement,

$$\begin{pmatrix} c_0^0 & c_1^0 & \dots & c_n^0 \\ c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^n & c_1^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice du système est une matrice de Vandermonde inversible, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, la famille $\mathcal{G} = (\varphi_c)_{c \in \mathbb{K}}$ est une famille libre de E^* . On en déduit que

$$\dim E^* \geq \text{card } \mathcal{G} = \text{card } \mathbb{K}$$

□

Lemme 36. $\dim E^* = \text{card } E^*$.

Démonstration. Comme E^* est de dimension infinie, on peut appliquer le théorème 8. On a donc

$$\text{card } E^* = \max(\dim E^*, \text{card } \mathbb{K})$$

Par le lemme précédent, ce maximum est $\dim E^*$. $\square$

Lemme 37. $\text{card } E^* = (\text{card } \mathbb{K})^{\dim E}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Considérons l'application $F : K^I \rightarrow E^*$ définie comme suit. Pour toute famille $u = (\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $F(u) \in E^*$ est définie, pour tout $i \in I$, par $F(u)(e_i) = \lambda_i$. L'application F est une bijection et donc

$$\text{card } E^* = \text{card } K^I = (\text{card } \mathbb{K})^{\text{card } I} = (\text{card } \mathbb{K})^{\dim E}$$

$\square$

Les deux derniers lemmes montrent le théorème 31.

5.2 Dual topologique

Lorsque l'espace vectoriel E est muni d'une topologie, on peut considérer le *dual topologique* de E qui est l'espace vectoriel E' des formes linéaires *continues* sur E . Nous entrons là dans la théorie des *espaces vectoriels topologiques*, qui sort du cadre de cet article.

Faisons juste quelques remarques, dans le cadre des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés.

Proposition 38. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit $\varphi \in E^*$. On a $\varphi \in E'$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$,

$$|\varphi(x)| \leq k\|x\|$$

Démonstration. Soit φ une forme linéaire continue sur E . La continuité de φ en 0 montre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| \leq \alpha \implies |\varphi(x)| \leq 1$$

Soit $x \in E$ non nul. On a

$$\alpha \frac{x}{\|x\|} = \alpha$$

et donc

$$\frac{\alpha}{\|x\|} |\varphi(x)| \leq 1$$

Ainsi,

$$|\varphi(x)| \leq k\|x\|$$

où $k = 1/\alpha$. L'inégalité ci-dessus est évidemment vérifiée aussi pour $x = 0$. Inversement, soit $\varphi \in E^*$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $|\varphi(x)| \leq k\|x\|$. On a pour tous $x, y \in E$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)| \leq k\|x - y\|$$

La fonction φ est lipschitzienne, et donc continue sur E . $\square$

Pour donner un exemple important, si $p \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $L^p(\mathbb{R})$ peut être muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

On peut prouver que le dual topologique de $L^p(\mathbb{R})$ est isomorphe à $L^q(\mathbb{R})$, où $q \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ vérifie

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Il en résulte que

$$\dim(L^p(\mathbb{R}))' = \dim(L^q(\mathbb{R}))' = \mathfrak{c} = \dim L^p(\mathbb{R})$$

et de même pour les cardinaux.

6 Résumé

Nous terminons par un tableau résumant, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les cardinaux et les dimensions des espaces vectoriels que nous avons considérés dans cet article. Il est curieux de remarquer que, sauf dans le cas des polynômes, tous ces espaces vectoriels ont leur dimension égale à leur cardinal.

	Espace vectoriel	Conditions	Cardinal	Dimension
Polynômes	$\mathbb{R}[X]$		$\mathfrak{c}$	$\aleph_0$
Fractions	$\mathbb{R}(X)$		$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
Fonctions	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$		$2^{\mathfrak{c}}$	$2^{\mathfrak{c}}$
	$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$	$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
	$L^p(\mathbb{R})$	$p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
Suites	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$		$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$		$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
	$\ell^p(\mathbb{R})$	$p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
Dual	E^*	$\dim E \geq \aleph_0$	$2^{\dim E}$	$2^{\dim E}$

FIGURE 1 – Cardinaux et dimensions de quelques espaces vectoriels réels