

Endomorphismes symétriques et diagonalisabilité en base orthonormée

Marc Lorenzi

24 février 2024

Un *espace euclidien* est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Dans la suite, nous noterons $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E et $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ la norme euclidienne du vecteur x .

Définition 1. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme f de E est *symétrique* si pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

Nous allons montrer que tout endomorphisme symétrique est « diagonalisable en base orthonormée ». La partie la plus subtile consiste à prouver qu'un tel endomorphisme possède une valeur propre.

Proposition 1. Soit f un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E . L'endomorphisme f possède une valeur propre.

Un « passage à $\mathbb{C}$ » et l'utilisation du théorème de d'Alembert-Gauss permettent de prouver ce résultat en considérant le complexifié de E , qui est un espace hermitien complexe. Nous allons procéder autrement, en utilisant un argument topologique.

Démonstration. Soit S la sphère de E de centre 0 et de rayon 1 :

$$S = \{x \in E : \langle x | x \rangle = 1\}$$

Comme E est de dimension finie, S est compacte. Considérons la fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \langle f(x) | x \rangle$$

La fonction φ est continue sur E . Elle possède donc un maximum sur le compact S . Soit $a \in S$ tel que $\varphi(a)$ soit maximal. Caché dans la démonstration qui suit, se trouve un problème d'extrema liés : trouver le maximum de $\langle f(x) | x \rangle$ sous la contrainte $\langle x | x \rangle = 1$. La linéarité sous-jacente nous permet de traiter la question d'un point de vue quasi-algébrique.

Soit h un vecteur orthogonal à a . Pour tout $n \geq 1$, posons

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \|h\|^2}} \left(a + \frac{1}{n} h \right)$$

Les vecteur a et h étant orthogonaux, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\langle x_n | x_n \rangle = \frac{n^2}{n^2 + \|h\|^2} \left\langle a + \frac{1}{n} h \mid a + \frac{1}{n} h \right\rangle = \frac{n^2}{n^2 + \|h\|^2} \left(1 + \frac{\|h\|^2}{n^2} \right) = 1$$

Ainsi, $x_n \in S$ et donc $\varphi(x_n) \leq \varphi(a)$, c'est à dire

$$\frac{n^2}{n^2 + \|h\|^2} \left\langle f(a) + \frac{1}{n} f(h) \mid a + \frac{1}{n} h \right\rangle \leq \langle f(a) | a \rangle$$

ou encore

$$\left\langle f(a) + \frac{1}{n} f(h) \mid a + \frac{1}{n} h \right\rangle \leq \frac{n^2 + \|h\|^2}{n^2} \langle f(a) | a \rangle$$

Développons en utilisant la bilinéarité du produit scalaire. La symétrie de f permet d'écrire $\langle f(h) | a \rangle = \langle f(a) | h \rangle$ et d'obtenir

$$\langle f(a) | a \rangle + \frac{2}{n} \langle f(a) | h \rangle + \frac{1}{n^2} \langle f(h) | h \rangle \leq \frac{n^2 + \|h\|^2}{n^2} \langle f(a) | a \rangle$$

En soustrayant $\langle f(a), a \rangle$ des deux côtés de l'inégalité, il vient

$$\frac{2}{n} \langle f(a) | h \rangle + \frac{1}{n^2} \langle f(h) | h \rangle \leq \frac{\|h\|^2}{n^2} \langle f(a) | a \rangle$$

De là,

$$\langle f(a) | h \rangle \leq \frac{\|h\|^2}{2n} \langle f(a) | a \rangle - \frac{1}{2n} \langle f(h) | h \rangle$$

Faisons tendre n vers l'infini pour obtenir

$$\langle f(a) | h \rangle \leq 0$$

Remarquons maintenant que $-h$ est aussi orthogonal à a . On a donc $\langle f(a) | -h \rangle \leq 0$, c'est à dire $\langle f(a) | h \rangle \geq 0$. Ainsi, $\langle f(a) | h \rangle = 0$.

Ceci est vrai pour tout vecteur $h \in a^\perp$, donc

$$f(a) \in (a^\perp)^\perp = \text{Vect}(a)$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$. $\square$

Maintenant que nous connaissons l'existence d'au moins une valeur propre pour un endomorphisme symétrique, une récurrence facile sur la dimension de l'espace permet de montrer sa « diagonalisabilité en base orthonormée ». Nous avons en fait une équivalence.

Proposition 2. *Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E . L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f .*

Démonstration.

($\Leftarrow$) C'est le sens facile. Supposons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres pour f . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées aux vecteurs de $\mathcal{B}$. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle f(e_i) | e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i | e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} = \langle e_i | f(e_j) \rangle$$

On en déduit facilement par linéarité que f est symétrique.

($\Rightarrow$) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout espace euclidien E de dimension n , les endomorphismes symétriques de E possèdent une base orthonormée de vecteurs propres.

C'est évident si $n = 0$: la famille vide est une base orthonormée de $\{0\}$ formée de vecteurs propres pour l'endomorphisme symétrique 0.

Soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout espace euclidien E de dimension $n - 1$, pour tout endomorphisme symétrique f de E , il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres pour f . Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit f un endomorphisme symétrique de E . Par la proposition 1, f possède une valeur propre $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Soit e_n un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_n . Soit $H = e_n^\perp$. Montrons que l'hyperplan H est stable par f . Pour cela, donnons nous $x \in H$. On a

$$\langle f(x) | e_n \rangle = \langle x | f(e_n) \rangle = \lambda_n \langle x | e_n \rangle = 0$$

Ainsi, $f(x) \in H$. Notons $\hat{f} \in \mathcal{L}(H)$ l'endomorphisme induit par f sur H . Clairement, $\hat{f}$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien H . Comme $\dim H = n - 1$, l'hypothèse de récurrence affirme l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H formée de vecteurs propres pour $\hat{f}$, et donc pour f . La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est alors une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour f . $\square$

Il existe évidemment un lien entre les endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et les matrices symétriques.

Proposition 3. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice symétrique.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Remarquons que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$A_{i,j} = \langle f(e_j) | e_i \rangle$$

La matrice A est symétrique si et seulement si pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(\star) \quad \langle f(e_j) | e_i \rangle = \langle f(e_i) | e_j \rangle$$

($\Rightarrow$) Supposons que f est symétrique. La symétrie de f entraîne $(\star)$, et donc la symétrie de A .

($\Leftarrow$) Supposons que A est symétrique. On a donc pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle f(e_i) \mid e_j \rangle = \langle e_i \mid f(e_j) \rangle$$

On en déduit, par la linéarité de f et la bilinéarité du produit scalaire, que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle$. Ainsi, f est un endomorphisme symétrique. $\square$

La proposition qui suit donne une interprétation matricielle de la proposition 2.

Proposition 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est symétrique si et seulement si il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale (ou $Q^T AQ$, puisque $Q^{-1} = Q^T$).*

Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale. On a alors

$$A = QDQ^{-1} = QDQ^T$$

d'où

$$A^T = Q^{TT} D^T Q^T = QDQ^T = A$$

La matrice A est donc symétrique.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice A est symétrique. Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A . Par la proposition 3, f est symétrique. Il existe donc, par la proposition 2, une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres pour f . La matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donc diagonale. Notons Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant orthonormées, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Les formules de changement de base donnent $Q^{-1}AQ = D$. $\square$