

# Espaces vectoriels de dimension infinie

Marc Lorenzi

31 mars 2014

## Résumé

L'axiome du choix entraîne l'existence de bases dans tous les espaces vectoriels, de dimension finie ou non. La dimension d'un espace vectoriel est alors le cardinal commun de ses bases, le cardinal des familles libres est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, etc. Après l'introduction de quelques rudiments sur les cardinaux transfinis, on établit une relation entre le cardinal d'un espace vectoriel, sa dimension et le cardinal de son corps de base. Puis on calcule la dimension de quelques espaces vectoriels bien connus de dimension infinie.

## 1 Rudiments sur les cardinaux transfinis

### 1.1 Équipotence

**Définition 1.** Deux ensembles sont dits équipotents lorsqu'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles, et on peut trouver dans chacune des classes modulo la relation d'équipotence un ensemble « caractéristique ». Il serait trop long d'expliquer dans cette introduction ce que cet ensemble a de caractéristique. Ce représentant si particulier est appelé le cardinal des ensembles de sa classe. Pour tout ensemble  $E$ , nous noterons  $|E|$  son cardinal.

### 1.2 Comparaison de cardinaux

**Définition 2.** Étant donnés deux cardinaux  $\kappa$  et  $\lambda$ , on dit que  $\kappa \leq \lambda$  lorsqu'il existe une injection de  $\kappa$  vers  $\lambda$ .

La relation  $\leq$  est clairement réflexive et transitive. Le théorème de Cantor-Bernstein et le fait que si deux cardinaux sont équipotents alors ils sont égaux prouvent qu'elle est aussi antisymétrique. C'est donc un ordre sur la classe de tous les cardinaux. Grâce à l'axiome du choix, on peut également démontrer que

cet ordre est total. C'est même un bon ordre : toute classe de cardinaux possède un plus petit élément. Enfin, tout ensemble non vide de cardinaux possède une borne supérieure.

Le cardinal de  $\mathbb{N}$  est noté  $\aleph_0$ . C'est aussi le cardinal de  $\mathbb{Q}$  ou de l'ensemble  $\mathbb{A}$  des nombres algébriques, ou encore de l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ . Un ensemble de cardinal  $\aleph_0$  est dit dénombrable. Un ensemble de cardinal strictement inférieur à  $\aleph_0$  est dit fini, sinon il est infini.  $\aleph_0$  est donc le plus petit cardinal infini. Les cardinaux des ensembles finis sont très exactement les entiers naturels.

### 1.3 Opérations sur les cardinaux

On peut définir des opérations sur les cardinaux, addition, multiplication et exponentiation, correspondant aux opérations similaires sur les ensembles. Ainsi, si  $\kappa$  et  $\lambda$  sont deux cardinaux,

$$\kappa + \lambda = |E \cup F|$$

où  $E$  est un ensemble de cardinal  $\kappa$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $\lambda$  ( $E$  et  $F$  étant disjoints). De même,

$$\kappa\lambda = |E \times F|$$

et

$$\kappa^\lambda = |E^F|$$

On montre facilement que ces cardinaux ne dépendent pas des ensembles  $E$  et  $F$  choisis.

On peut montrer que

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$$

Ce cardinal est

$$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$$

Le cardinal  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$  est appelé la *puissance du continu*. Le théorème de Cantor affirme que pour tout cardinal  $\kappa$  on a  $2^\kappa > \kappa$ . Ainsi, entre-autres,  $\mathfrak{c} > \aleph_0$  et  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Proposition 1.** *Si  $\kappa$  et  $\lambda$  sont deux cardinaux non nuls dont l'un au moins est infini, alors*

$$\kappa + \lambda = \kappa\lambda = \max(\kappa, \lambda)$$

**Démonstration.** Admise.  $\square$

En particulier, si  $\kappa$  est infini et  $\lambda$  est fini, alors  $\kappa^\lambda = \kappa \dots \kappa = \kappa$ .

Enfin, on peut définir la somme d'une famille quelconque de cardinaux. Si  $(\kappa_i)_{i < \lambda}$  est une famille de cardinaux indexée par les cardinaux  $i$  strictement inférieurs au cardinal  $\lambda$ , on note

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \left| \bigcup_{i < \lambda} E_i \right|$$

où les  $E_i$  sont des ensembles disjoints de cardinaux respectifs  $\kappa_i$ . Encore une fois, ce cardinal ne dépend pas des ensembles choisis mais seulement de leurs cardinaux. Si  $\lambda$  est infini et les  $\kappa_i$  sont non nuls, alors

$$\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \lambda \kappa \text{ où } \kappa = \sup_{i < \lambda} \kappa_i$$

Ainsi, par exemple,

$$\sum_{n < \aleph_0} n = \aleph_0 \sup_{n < \aleph_0} n = \aleph_0^2 = \aleph_0$$

## 2 Relation entre cardinal et dimension

**Proposition 2.** Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $\lambda$  infini. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}_n(A)$  des parties de  $A$  de cardinal  $n$  est de cardinal inférieur ou égal à  $\lambda$ .

**Démonstration.** Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $|\mathcal{P}_n(A)|$  est inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $A$ , c'est à dire à  $|A^n| = \lambda^n = \lambda$  puisque  $\lambda$  est infini. Si  $n = 0$ , le résultat est évident :  $1 \leq \lambda$ . Remarquons quand même (exercice !) que si  $n \geq 1$ , on a en fait  $|\mathcal{P}_n(A)| = \lambda$ .  $\square$

**Proposition 3.** Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $\lambda$  infini. L'ensemble  $\mathcal{P}_f(A)$  des parties finies de  $A$  est de cardinal  $\lambda$ .

**Démonstration.** On a  $\mathcal{P}_f(A) = \cup_{n < \aleph_0} \mathcal{P}_n(A)$ , donc  $|\mathcal{P}_f(A)| \leq \sum_{n < \aleph_0} |\mathcal{P}_n(A)| \leq \sum_{n < \aleph_0} \lambda = \aleph_0 \lambda = \lambda$ . Par ailleurs,  $\mathcal{P}_f(A) \supset \mathcal{P}_1(A)$  et il y a une bijection évidente entre  $A$  et  $\mathcal{P}_1(A)$  (laquelle ?). Donc  $|\mathcal{P}_f(A)| \geq \lambda$ .  $\square$

**Proposition 4.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps infini de cardinal  $\kappa$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie  $\lambda$ . Le cardinal de  $E$  est  $|E| = \max(\kappa, \lambda)$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ , où l'ensemble  $I$  des indices est de cardinal  $\lambda$ .

Soit  $e$  un vecteur non nul de  $E$ . On a  $\langle e \rangle \subset E$  et  $|\langle e \rangle| = \kappa$ . Donc,  $\kappa \leq |E|$ . On a également  $\{e_i, i \in I\} \subset E$  donc  $\lambda \leq |E|$ . Ainsi,  $|E| \geq \max(\kappa, \lambda)$ .

Inversement, notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des sous-familles finies de  $\mathcal{B}$ . on a  $E = \cup_{\mathcal{F} \in \mathcal{E}} \langle \mathcal{F} \rangle$ . D'où  $|E| \leq \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{E}} |\langle \mathcal{F} \rangle|$ . Mais pour toute sous-famille finie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{B}$  de cardinal  $n \geq 1$ , on a une bijection évidente entre  $\mathbb{K}^n$  et  $\langle \mathcal{F} \rangle$  (laquelle ?) donc  $|\langle \mathcal{F} \rangle| = |\mathbb{K}^n| = \kappa^n = \kappa$ . D'où  $|E| \leq \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{E}} \kappa = \kappa \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{E}} 1 = \kappa |\mathcal{E}|$ . Pour finir, l'application  $J \mapsto (e_i)_{i \in J}$  est une bijection entre les parties finies de  $I$  et les sous-familles finies de  $\mathcal{B}$ . Donc  $|\mathcal{E}| = |\mathcal{P}_f(I)| = \lambda$ . D'où  $|E| \leq \kappa \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ .

$\square$

**Remarque.**

- Si  $\lambda$  est infini ou  $\kappa$  est infini (mais pas forcément les deux), le résultat précédent demeure vrai : laissé en exercice, reprendre pas à pas la démonstration du théorème.
- Si  $\lambda$  et  $\kappa$  sont finis, on a bien entendu  $|E| = \kappa^\lambda$ .

### 3 Fonctions à valeurs dans un corps

#### 3.1 Fonctions à support fini à valeurs dans un corps

**Définition 3.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Soit  $X$  un ensemble. On désigne par  $\mathbb{K}^{(X)}$  l'ensemble des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  à support fini, c'est à dire telles que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in X$  sauf un nombre fini.

**Proposition 5.** Avec les opérations naturelles,  $\mathbb{K}^{(X)}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $|X|$ .

**Démonstration.** La structure d'espace vectoriel est évidente. Une base de  $\mathbb{K}^{(X)}$  est la famille  $\mathcal{B} = (f_x)_{x \in X}$  où  $f_x$  est définie pour tout  $y \in X$  par  $f_x(y) = 0$  si  $y \neq x$  et  $f_x(x) = 1$ . D'où la dimension.  $\square$

#### 3.2 Fonctions à valeurs dans un corps

L'espace  $\mathbb{K}^X$  des fonctions de l'ensemble  $X$  dans le corps  $\mathbb{K}$  est lui-aussi un espace vectoriel. On suppose dans ce qui suit que  $\mathbb{K}$  est un corps de cardinal  $\kappa$  et que  $X$  est un ensemble infini de cardinal  $\delta$ . Nous notons  $\delta^*$  la dimension de  $\mathbb{K}^X$ .

**Proposition 6.**  $\kappa^\delta = \max(\kappa, \delta^*)$ .

**Démonstration.** Car  $|\mathbb{K}^X| = \kappa^\delta$ .  $\square$

**Proposition 7.**  $\delta^* \geq \kappa$ .

**Démonstration.** L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^X$  est isomorphe à l'espace  $\mathbb{K}^\delta$ , puisque  $X$  et le cardinal  $\delta$  sont en bijection. Rappelons que  $\delta$  est infini. Pour tout  $q \in \mathbb{K}$ , soit  $\xi_q : \delta \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $\xi_q(i) = q^i$  si  $i < \aleph_0$  et  $\xi_q(i) = 0$  si  $\aleph_0 \leq i < \delta$ . Nous allons montrer que la famille  $(\xi_q)_{q \in \mathbb{K}}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^\delta$ .

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $q_1, \dots, q_n$  distincts de  $\mathbb{K}$ , la famille  $(\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n})$  est libre. C'est clair pour  $n = 1$  car  $\xi_{q_1} \neq 0$  ( $q_1^0 = 1$ ). Supposons la liberté acquise pour l'entier  $n$  et donnons nous  $q_1, \dots, q_{n+1}$  distincts dans  $\mathbb{K}$ . Soient  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$  tels que  $a_1 \xi_{q_1} + \dots + a_{n+1} \xi_{q_{n+1}} = 0$ . On a donc pour tout  $i < \aleph_0$ ,  $a_1 q_1^i + \dots + a_{n+1} q_{n+1}^i = 0$  (1). Pour tout  $i < \aleph_0$ , on a aussi  $i + 1 < \aleph_0$ . Ainsi, pour tout  $i < \aleph_0$ ,  $a_1 q_1^{i+1} + \dots + a_{n+1} q_{n+1}^{i+1} = 0$  (2). On combine (1) et (2) pour obtenir  $a_1(q_{n+1} - q_1)q_1^i + \dots +$

$a_n(q_{n+1} - q_n)q_n^i = 0$ . Cette égalité est trivialement vérifiée pour  $\aleph_0 \leq i < \delta$ . On a donc  $a_1(q_{n+1} - q_1)\xi_{q_1} + \dots + a_n(q_{n+1} - q_n)\xi_{q_n} = 0$ . Grâce à l'hypothèse de récurrence et au fait que les  $q_i$  sont distincts, on déduit  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . On reporte, on obtient  $a_{n+1} = 0$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{K}^\delta$  possède donc une famille libre de cardinal  $\kappa$ . On en déduit que sa dimension,  $\delta^*$ , est au moins égale à  $\kappa$ .

□

**Proposition 8.** [ERDŐS-KAPLANSKI]  $\delta^* = \kappa^\delta$ .

**Démonstration.** Puisque  $\max(\kappa, \delta^*) = \delta^*$ . □

## 4 Dual d'un espace vectoriel

Dans toute cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $\delta$ . On note  $\kappa = |\mathbb{K}|$ . On sait que lorsque  $\delta$  est fini,  $E$  et son dual  $E^*$  sont de même dimension. Nous allons montrer que ce n'est jamais le cas en dimension infinie. Dans toute la suite, nous supposons que  $\delta$  est infini.

### 4.1 Espace dual et familles de scalaires

**Proposition 9.** Les espaces vectoriels  $E^*$  et  $\mathbb{K}^\delta$  sont isomorphes.

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i < \delta}$  une base de  $E$ . Une forme linéaire  $\varphi \in E^*$  est caractérisée par la famille  $(\varphi(e_i))_{i < \delta} \in \mathbb{K}^\delta$ . Ainsi, l'application  $F : E^* \rightarrow \mathbb{K}^\delta$  définie par  $F(\varphi) = (\varphi(e_i))_{i < \delta}$  est injective. Il est évident qu'elle est aussi surjective (toute famille de scalaires définit bien une forme linéaire sur  $E$ ) et linéaire. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

### 4.2 Conséquences

**Corollaire 10.** Le cardinal du dual de  $E$  est  $|E^*| = \kappa^\delta$ .

**Démonstration.**  $|E^*| = |\mathbb{K}^\delta| = \kappa^\delta$ . □

**Corollaire 11.** La dimension du dual de  $E$  est  $\dim E^* = \kappa^\delta$ .

**Démonstration.**  $E^*$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^\delta$ . D'où le résultat par le théorème d'Erdős-Kaplanski. □

### 4.3 Dual, bidual

Le théorème de Cantor nous dit que  $\kappa^\delta \geq 2^\delta > \delta$ . Ainsi,  $\dim E^* > \dim E$ . En dimension infinie, un espace vectoriel et son dual ne sont donc pas isomorphes. Et bien entendu,  $\dim E^{**} = \kappa^{\delta^*} > \delta^* > \delta$ . Un espace vectoriel de dimension infinie n'est donc pas non plus isomorphe à son bidual.

### 4.4 Le dual de $\mathbb{R}[X]$

**Proposition 12.**  $\dim \mathbb{R}[X] = \aleph_0$  et  $\dim \mathbb{R}[X]^* = 2^{\aleph_0}$ .

**Démonstration.** C'est évident, puisque  $\mathbb{R}[X] \simeq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ .  $\square$

## 5 Dimensions de quelques espaces usuels

### 5.1 L'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

**Proposition 13.**  $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$

**Démonstration.**  $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ .  $\square$

**Proposition 14.**  $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = 2^{2^{\aleph_0}}$

**Démonstration.** On peut bien évidemment utiliser le théorème d'Erdős-Kaplanski, mais ici, tout peut se faire à la main. Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Le corps de base est ici  $\mathbb{R}$ , de cardinal  $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ , et on a  $|E| = 2^{2^{\aleph_0}}$ . Soit  $\lambda = \dim E$ . On a donc  $\max(2^{\aleph_0}, \lambda) = 2^{2^{\aleph_0}}$ . Or,  $2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}}$  d'après le théorème de Cantor, donc  $\lambda = 2^{2^{\aleph_0}}$ .  $\square$

**Remarque.** La dimension du dual de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est  $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^* = |\mathbb{R}|^{\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = (2^{\aleph_0})^{2^{2^{\aleph_0}}} = 2^{\aleph_0 2^{2^{\aleph_0}}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ . Ça commence à faire gros.

### 5.2 L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$

**Proposition 15.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . On suppose que  $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ . Alors  $f = g$ .

**Démonstration.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , le réel  $x$  est donc la limite d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de rationnels. On a pour tout entier  $n$ ,  $f(x_n) = g(x_n)$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  étant continues en  $x$ ,  $f(x_n)$  tend vers  $f(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, et de même pour  $g$ , par le théorème de caractérisation séquentielle des limites. Par unicité de la limite, on a bien  $f(x) = g(x)$ .  $\square$

**Proposition 16.**  $|\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$

**Démonstration.**  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  contient les fonctions constantes, donc son cardinal est au moins égal à celui de  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, d'après la propriété précédente, la fonction  $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$  est une injection de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ , donc  $|\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}$ . D'où l'égalité.  $\square$

**Lemme 17.** La famille de fonctions  $\mathcal{F} = (f_t)_{t \in \mathbb{R}}$  définie par  $\forall t, x \in \mathbb{R}, f_t(x) = e^{tx}$  est une famille libre de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .

**Démonstration.** La famille  $\mathcal{F}$  est bien une famille de fonctions de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  (et même de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ). Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , pour tous réels distincts  $t_1, \dots, t_n$ , la famille  $(f_{t_1}, \dots, f_{t_n})$  est libre. C'est évident pour  $n = 0$  (famille vide) et pour  $n = 1$  (car  $f_{t_1}$  n'est pas la fonction nulle). Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vraie pour l'entier  $n$ . Soient  $t_1, \dots, t_{n+1}$   $n + 1$  réels distincts. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$   $n + 1$  réels. Supposons que  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_{t_k} = 0$ . On dérive, on obtient  $\sum_{k=1}^{n+1} t_k \lambda_k f_{t_k} = 0$ . On multiplie la première égalité par  $t_{n+1}$ , on soustrait la deuxième égalité, et on obtient  $\sum_{k=1}^n (t_{n+1} - t_k) \lambda_k f_{t_k} = 0$ . Grâce à l'hypothèse de récurrence, on déduit que pour tout  $k$  entre 1 et  $n$ , le réel  $(t_{n+1} - t_k) \lambda_k$  est nul, donc  $\lambda_k = 0$  puisque  $t_1, \dots, t_n$  sont différents de  $t_{n+1}$ . On reporte dans la première égalité : la fonction  $f_{t_{n+1}}$  n'est pas nulle donc  $\lambda_{n+1} = 0$ .  $\square$

**Proposition 18.**  $\dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$

**Démonstration.** Soit  $\lambda = \dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . On a  $\max(2^{\aleph_0}, \lambda) = |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ . Donc  $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$ . Par ailleurs, la famille  $\mathcal{F}$  définie dans le lemme ci-dessus est libre et de cardinal  $2^{\aleph_0}$ . On en déduit que  $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$ . Ainsi,  $\lambda = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$

### 5.3 L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

**Proposition 19.**  $\dim \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ .

**Démonstration.**  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  étant un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  sa dimension est donc inférieure ou égale à  $2^{\aleph_0}$ . De plus, la famille de fonctions  $\mathcal{F}$  définie dans le paragraphe sur  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est une famille libre de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  de cardinal  $2^{\aleph_0}$ . On en déduit que  $\dim \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \geq 2^{\aleph_0}$ . D'où la dimension cherchée.  $\square$

### 5.4 What else ?

Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  sont de dimensions respectives  $\aleph_0$ ,  $2^{\aleph_0}$  et  $2^{2^{\aleph_0}}$ . Tout sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  de dimension infinie a bien évidemment une dimension comprise entre  $\aleph_0$  et  $2^{2^{\aleph_0}}$ . La question se pose donc de savoir si d'autres dimensions que ces trois-là sont possibles. En supposant

l'Hypothèse Généralisée du Continu, la réponse est non. En supposant la négation de l'Hypothèse du Continu, soit  $\mathcal{B} = (f_i)_{i \in I}$  une base de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . L'ensemble  $I$  des indices de  $\mathcal{B}$  est de cardinal  $2^{\aleph_0}$ . En vertu de  $\neg GC$ , il possède donc un sous-ensemble  $J$  de cardinal  $\aleph_1$ , où  $\aleph_0 < \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$  est le plus petit cardinal strictement supérieur à  $\aleph_0$ . L'espace  $E$  engendré par  $(f_i)_{i \in J}$  est alors un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  de dimension  $\aleph_1$ .

## 5.5 L'espace des suites réelles

**Proposition 20.**  $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$ .

**Démonstration.**  $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$

**Proposition 21.**  $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$ .

**Démonstration.** Théorème d'Erdős-Kaplanski.  $\square$

## 5.6 Le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$

**Proposition 22.**  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ .

**Démonstration.** Soit  $\lambda = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ . On a  $|\mathbb{R}| = \max(|\mathbb{Q}|, \lambda)$ , ou encore  $2^{\aleph_0} = \max(\aleph_0, \lambda)$ . Mais  $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$  donc  $\lambda = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$