

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose $P(A)$ diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Commençons par regarder ce qui se passe pour des matrices d'une forme particulière.

Soit $r \geq 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

La matrice N est nilpotente d'ordre au plus r : pour tout $i \geq r$, $N^i = 0$. Soit $J_\lambda = \lambda I + N \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$J_\lambda^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a

$$P(J_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{k=i}^{\infty} a_k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \right] N^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i N^i$$

où α_i est l'expression entre crochets. Par la nilpotence de N ,

$$P(J_\lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i N^i$$

Remarquons que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_i = \frac{1}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} a_k k(k-1) \dots (k-i+1) \lambda^{k-i} = \frac{1}{i!} P^{(i)}(\lambda)$$

et donc

$$P(J_\lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} N^i$$

Supposons que $P(J_\lambda)$ est diagonalisable. Il existe donc une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telles que $P(J_\lambda) = Q^{-1} D Q$. J et D étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres. Or, la seule valeur propre de $P(J_\lambda)$ est $P(\lambda)$, donc $D = P(\lambda) I_r$. De là,

$$P(J_\lambda) = Q^{-1} P(\lambda) I_r Q = P(\lambda) I_r$$

La famille $(N^i)_{0 \leq i \leq r-1}$ étant libre dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, on a donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$. La réciproque est évidente, et donc

$P(J_\lambda)$ est diagonalisable si et seulement si $P'(\lambda) = P''(\lambda) = \dots = P^{(r-1)}(\lambda) = 0$.

En corollaire immédiat, si $P(J_\lambda)$ est diagonalisable et $P'(\lambda) \neq 0$, alors $r = 1$.

Passons au cas général.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A peut être mise sous la **forme canonique de Jordan** : A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_q})$ où les λ_i sont

les valeurs propres (pas nécessairement distinctes) de A . En désignant par $\sim$ la relation de similitude :

$$A \sim \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_q})$$

Supposons que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. On a

$$P(A) \sim \text{diag}(P(J_{\lambda_1}), \dots, P(J_{\lambda_q}))$$

$$P'(A) \sim \text{diag}(P'(J_{\lambda_1}), \dots, P'(J_{\lambda_q}))$$

Comme $P'(A)$ est inversible, les matrices $P'(J_{\lambda_i})$ le sont aussi, ce qui signifie que pour tout i , $P'(\lambda_i) \neq 0$.

Comme $P(A)$ est diagonalisable, les matrices $P(J_{\lambda_i})$ le sont aussi, mais comme $P'(\lambda_i) \neq 0$ cela entraîne que toutes ces matrices sont de taille 1×1 . Ainsi, A est diagonalisable.