

Matrices circulantes et rotations

Marc Lorenzi

16 juin 2023

1 Introduction

1.1 Une matrice circulante

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

f est une rotation si et seulement si $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est à dire quand les colonnes de A sont unitaires, orthogonales, et $\det(A) = 1$.

Posons

$$\begin{cases} \sigma_1 &= a + b + c \\ \sigma_2 &= ab + ac + bc \\ \sigma_3 &= abc \end{cases}$$

L'orthogonalité des colonnes équivaut à

$$\sigma_2 = 0$$

L'unitarité des colonnes équivaut à

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

c'est à dire

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1$$

Calculons $\det(A)$. En ajoutant à la première colonne la somme des deux autres, il vient

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) \end{aligned}$$

Ainsi, $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 1 \\ \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) &= 1 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$$

Ceci signifie que a, b, c sont les racines de l'équation de degré 3

$$(E) \quad x^3 - x^2 + k = 0$$

où $k \in \mathbb{R}$. Cette équation doit avoir trois racines réelles, ce qui impose des conditions sur k . Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^3 - x^2 + k$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = x(3x - 2)$$

La fonction φ croît strictement sur $]-\infty, 0]$, passe par un maximum en 0 (où elle vaut k), décroît strictement sur $[0, \frac{2}{3}]$, passe par un minimum en $\frac{2}{3}$ (où elle vaut $k - \frac{4}{27}$) puis croît strictement sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$. Ainsi, φ a trois racines réelles si et seulement si

$$0 \leq k \leq \frac{4}{27}$$

Posons dorénavant

$$k = \frac{4}{27} \sin^2 \varphi$$

où $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

1.2 L'axe de la rotation

Écartons le cas très particulier où $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. Dans ce cas, $f = id_E$. Hormis ce cas, f est une rotation différente de l'identité, l'ensemble des invariants par f est donc une droite. Or, $a + b + c = 1$, donc le vecteur $(1, 1, 1)$ est invariant par f . Ainsi, l'axe de la rotation f est

$$D = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Nous orientons l'axe D par le vecteur $e = (1, 1, 1)$.

2 Racines doubles

2.1 Le cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$

L'équation (E) a $\frac{2}{3}$ pour racine double. La somme des racines vaut 1, donc la troisième racine, simple, est $-\frac{1}{3}$. Il y a trois matrices A possibles qui sont

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Commençons par A_1 . Soit θ l'angle de la rotation f . On a

$$\text{Tr}(f) = 1 + 2 \cos \theta = -1$$

Ainsi, $\theta = \pi$. La rotation f est un demi-tour.

Passons à A_2 . Soit θ l'angle de la rotation f . On a

$$\text{Tr}(f) = 1 + 2 \cos \theta = 2$$

Ainsi, $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Soit $u = (1, 0, 0)$. Le signe de $\sin \theta$ est celui du produit mixte

$$[u, f(u), e] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

On a donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Remarquons que $A_3 = A_2^T = A_2^{-1}$. f est donc la rotation d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

2.2 Le cas $\varphi = 0$

L'équation (E) a 0 pour racine double et 1 pour racine simple. Il y a trois matrices A possibles qui sont

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première matrice nous donne $f = id_E$, dont nous avons déjà parlé.

En remarquant que $A_1^2 = B_1$, on obtient que l'endomorphisme f associé à B_1 est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. De même, $A_2^2 = B_2$. L'endomorphisme f associé à B_2 est donc la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

3 Racines simples

3.1 Résolution de (E)

Nous supposons dorénavant que $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}$. L'équation (E) a donc trois racines simples a, b, c . Résolvons (E) . Pour cela, posons $x = y + \frac{1}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + k &= \left(y + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + k \\ &= y^3 - \frac{1}{3}y + k - \frac{2}{27} \\ &= y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{2}{27} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

en remarquant que

$$k - \frac{2}{27} = \frac{2}{27}(2 \sin^2 \varphi - 1) = -\frac{2}{27} \cos(2\varphi)$$

Posons maintenant $y = \frac{2}{3}z$. On a alors

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + k &= \frac{8}{27}z^3 - \frac{2}{9}z - \frac{2}{27}\cos(2\varphi) \\ &= \frac{2}{27}(4z^3 - 3z - \cos(2\varphi)) \end{aligned}$$

Une étude rapide de la fonction $z \mapsto 4z^3 - 3z$ montre que si x est solution de (E) alors $z \in [-1, 1]$. Posons donc $z = \cos \alpha$. Le réel x est solution de (E) si et seulement si

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos(2\varphi)$$

c'est à dire

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\varphi)$$

ou encore

$$3\alpha \equiv \pm 2\varphi \pmod{2\pi}$$

Seule la valeur de $\cos \alpha$ nous importe. Ce cosinus prend trois valeurs distinctes pour des valeurs de α qui sont

$$\alpha_k = \frac{2\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$. en déduit les solutions de (E) , qui sont

$$x = y + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cos \alpha + \frac{1}{3}$$

Ainsi,

$$\{a, b, c\} = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos \alpha_k, k = -1, 0, 1 \right\}$$

3.2 Le cosinus de l'angle

Soit θ l'angle de la rotation f . On a

$$Tr(f) = 1 + 2\cos \theta = 3a = 1 + 2\cos \alpha_k$$

Ainsi,

$$\cos \theta = \cos \alpha_k$$

donc

$$\theta = \pm \alpha_k = \pm \left(\frac{2\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right)$$

3.3 Le sinus de l'angle

Soit $u = (1, 0, 0)$. Le signe de $\sin \theta$ est celui du produit mixte

$$[u, f(u), e] = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = c - b$$

Il y a 6 choix possibles pour le triplet (a, b, c) . Selon les choix faits, $\sin \theta$ est positif ou négatif. Nous ne détaillerons pas davantage.