

Systèmes triangulaires

Marc Lorenzi

30 janvier 2023

Proposition 1. Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure. A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Démonstration. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$, $A_{ij} = 0$. Considérons le système linéaire

$$(S) \quad AX = Y$$

de second membre $Y = (y_1 \ \dots \ y_n)^T$ et d'inconnue $X = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$. On a là un système de n équations à n inconnues. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i ème équation de (S) est

$$(E_i) \quad \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = y_i$$

ou encore, comme A est triangulaire,

$$(E_i) \quad A_{ii}x_i = y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j$$

Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{ii} \neq 0$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par récurrence forte par

$$(\star) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j \right)$$

En particulier, pour $i = 1$, la somme est nulle et $x_1 = \frac{y_1}{A_{11}}$. Clairement, X est solution du système (S) . Le système (S) admet donc au moins une solution, ceci pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Ainsi, A est inversible.

Supposons maintenant qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $A_{kk} = 0$. Prenons un tel k minimal. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ définie pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par $y_i = \delta_{ik}$. Supposons que le système (S) admet une solution X . Montrons par récurrence forte sur i que pour tout $i < k$, $x_i = 0$. Tout d'abord,

$$(E_1) \quad A_{11}x_1 = 0$$

et donc $x_1 = 0$. Soit $i < k$. Supposons que pour tout $j < i$, $x_j = 0$. On a alors

$$(E_i) \quad A_{ii}x_i = y_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j = 0$$

et donc $x_i = 0$. Maintenant, l'équation

$$(E_k) \quad A_{kk}x_k = y_k - \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj}x_j$$

devient $0 = 1$. Contradiction. Ainsi, le système (S) n'a pas de solution. La matrice A n'est donc pas inversible. $\square$

Proposition 2. *Soit A une matrice triangulaire inférieure inversible. L'inverse de A est une matrice triangulaire inférieure.*

Démonstration. Soit $B = A^{-1}$. Reprenons les notations de la proposition précédente. Le système $(S) \quad AX = Y$ a une unique solution qui est $X = BY$. On a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_i = X_{i1} = \sum_{j=1}^n B_{ij}Y_{j1} = \sum_{j=1}^n B_{ij}y_j$$

Rappelons-nous que X est donné par $(\star)$. Une récurrence facile sur i montre que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i est combinaison de $y_1, \dots, y_i$. On en déduit que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $j > i$ alors $B_{ij} = 0$. Ainsi, B est triangulaire inférieure. $\square$

Proposition 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure. Le nombre d'opérations arithmétiques effectuées pour inverser A à l'aide de $(\star)$ est*

$$C_n = n^3$$

Démonstration. Pour inverser A , on résout n systèmes linéaires $(S) \quad AX = Y$ en prenant successivement pour Y les n matrices élémentaires $n \times 1$. Dénombrons le nombre d'opérations arithmétiques effectuées pour résoudre un tel système.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la détermination de x_i à partir de (E_i) demande

- Une division.
- Une soustraction.
- $i - 1$ multiplications.
- $i - 2$ additions.

Au total, nous avons donc $2i - 1$ opérations. Le nombre total d'opérations pour obtenir tous les x_i est donc

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

Résoudre n systèmes nécessite ainsi n^3 opérations. $\square$