

Matrices de Toeplitz tridiagonales

Marc Lorenzi

27 décembre 2020

1 Introduction

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A_n = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

On se propose dans un premier temps de calculer $D_n = \det A_n$.

On a $D_0 = 1$, $D_1 = x$, et pour tout $n \geq 2$, par un développement par rapport à la première colonne,

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

La suite $(D_n)_{n \geq 0}$ est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$(E) \quad X^2 - aX + bc = 0$$

Le discriminant de (E) est $\Delta = a^2 - 4bc$.

2 Le cas $\Delta < 0$

Supposons $\Delta < 0$. On a donc $bc > 0$. Soit $d = \sqrt{bc}$. Comme $\Delta < 0$, on a $|x| < 2d$. Posons $a = 2d \cos \theta$, où $\theta \in]0, \pi[$. Il vient

$$\Delta = -4d^2 \sin^2 \theta$$

Une racine carrée de Δ est

$$\delta = 2id \sin \theta$$

Les racines de (E) sont $de^{\pm i\theta}$ et on en déduit

$$D_n = \alpha d^n e^{in\theta} + \beta d^n e^{-in\theta}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont obtenus en regardant D_0 et D_1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha de^{i\theta} + \beta de^{-i\theta} &= 2d \cos \theta \end{cases}$$

Facilement,

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{e^{i\theta}}{\sin \theta} \\ \beta &= \frac{e^{-i\theta}}{\sin \theta} \end{cases}$$

Ainsi,

$$D_n = d^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

3 Le cas $\Delta = 0$

On a $\Delta = 0$ lorsque $a^2 = 4bc$. Si $a = 0$, alors $b = 0$ ou $c = 0$. La matrice A_n est triangulaire avec des zéros sur la diagonale. Son déterminant est nul (sauf pour $n = 0$). Supposons maintenant $a \neq 0$. Posons $d = \frac{a}{2}$. L'unique racine de (E) est alors d . On a

$$D_n = (\alpha n + \beta) d^n$$

où

$$\begin{cases} \beta &= 1 \\ d(\alpha + \beta) &= 2d \end{cases}$$

Ainsi, $\alpha = \beta = 1$, et

$$D_n = (n+1) d^n$$

Remarquons que cette égalité reste correcte lorsque $a = 0$.

4 Le cas $\Delta > 0, bc > 0$

Supposons $\Delta > 0$. Posons $d = \sqrt{bc}$. On a $|a| > 2d$, c'est à dire $a > 2d$ ou $a < -2d$.

4.1 Le cas $a > 2d$

Posons $a = 2d \cosh \theta$, où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Il vient

$$\Delta = a^2 - 4bc = 4d^2(\cosh^2 \theta - 1) = 4d^2 \sinh^2 \theta$$

Une racine carrée de Δ est

$$\delta = 2d \sinh \theta$$

Les racines de (E) sont $de^{\pm\theta}$ et on en déduit

$$D_n = \alpha d^n e^{n\theta} + \beta d^n e^{-n\theta}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont obtenus en regardant D_0 et D_1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha de^\theta + \beta de^{-\theta} &= 2d \cosh \theta \end{cases}$$

Facilement,

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{e^\theta}{\sinh \theta} \\ \beta &= \frac{e^{-\theta}}{\sinh \theta} \end{cases}$$

Ainsi,

$$D_n = d^n \frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh \theta}$$

4.2 Le cas $a < -2d$

Posons $a = -2d \cosh \theta$, où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Il vient

$$\Delta = a^2 - 4bc = 4d^2(\cosh^2 \theta - 1) = 4d^2 \sinh^2 \theta$$

Une racine carrée de Δ est

$$\delta = 2d \sinh \theta$$

Les racines de (E) sont $-de^{\pm\theta}$ et on en déduit

$$D_n = (-1)^n \left(\alpha d^n e^{n\theta} + \beta d^n e^{-n\theta} \right)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont obtenus en regardant D_0 et D_1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha de^\theta + \beta de^{-\theta} &= 2d \cosh \theta \end{cases}$$

D'où, comme dans le cas précédent,

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{e^\theta}{\sinh \theta} \\ \beta &= \frac{e^{-\theta}}{\sinh \theta} \end{cases}$$

Ainsi,

$$D_n = (-1)^n d^n \frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh \theta}$$

5 Le cas $\Delta > 0, bc = 0$

On a ici $b = 0$ ou $c = 0$. La matrice A_n est triangulaire, son déterminant

6 Le cas $\Delta > 0, bc < 0$

La condition $\Delta > 0$ est en fait redondante, puisque $\Delta = a^2 - 4bc \geq -4bc > 0$. Posons $d = \sqrt{-bc}$, et $a = 2d \sinh \theta$, où $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\Delta = a^2 - 4bc = 4d^2(\sinh^2 \theta + 1) = 4d^2 \cosh^2 \theta$$

Les racines de (E) sont donc e^θ et $-e^{-\theta}$. On a donc

$$D_n = \alpha d^n e^{n\theta} + \beta (-1)^n d^n e^{-n\theta}$$

où α et β vérifient

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha d e^\theta - \beta d e^{-\theta} &= 2d \sinh \theta \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{e^\theta}{2 \cosh \theta} \\ \beta &= \frac{e^{-\theta}}{2 \cosh \theta} \end{cases}$$

et de là

$$D_n = \frac{d^n}{2 \cosh \theta} \left(e^{(n+1)\theta} + (-1)^n e^{-(n+1)\theta} \right)$$

Si n est pair,

$$D_n = d^n \frac{\cosh(n+1)\theta}{\cosh \theta}$$

Si n est impair,

$$D_n = d^n \frac{\sinh(n+1)\theta}{\cosh \theta}$$