

Ensemble des points de continuité d'une fonction

Marc Lorenzi

19 novembre 2021

1 Introduction

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, notons $C(f)$ l'ensemble des réels en lesquels f est continue. Que peut-on dire de l'ensemble $C(f)$? Nous allons voir dans cet article que n'importe quelle partie de $\mathbb{R}$ ne peut pas être l'ensemble des points de continuité d'une fonction.

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ est le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$. Notons $D(f) = C(f)^c$ l'ensemble des réels en lesquels la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est discontinue.

Pour tous réels a et $\alpha > 0$, nous noterons $B(a, \alpha)$ l'intervalle ouvert de centre a et de rayon α :

$$B(a, \alpha) =]a - \alpha, a + \alpha[$$

et $\overline{B}(a, \alpha)$ l'intervalle fermé de centre a et de rayon α :

$$\overline{B}(a, \alpha) = [a - \alpha, a + \alpha]$$

2 $\mathcal{G}_\delta$ et $\mathcal{F}_\sigma$

Définition 1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est appelée un $\mathcal{G}_\delta$ lorsque A est une intersection dénombrable d'ouverts. C'est un $\mathcal{F}_\sigma$ lorsque A est une réunion dénombrable de fermés.

Les $\mathcal{G}_\delta$ sont donc les complémentaires de $\mathcal{F}_\sigma$.

Proposition 1. Les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}$ sont à la fois des $\mathcal{G}_\delta$ et des $\mathcal{F}_\sigma$.

Démonstration. Soit U un ouvert U de $\mathbb{R}$. U est évidemment un $\mathcal{G}_\delta$ puisque $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U$.

Montrons maintenant que U est une réunion dénombrable d'intervalles fermés. Comme U est ouvert, pour tout $x \in U \cap \mathbb{Q}$, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\overline{B}(x, r) \subseteq U$. Soit

$$V = \bigcup_{(x,r) \in A} \overline{B}(x, r)$$

où

$$A = \{(x, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*, x \in U \text{ et } \overline{B}(x, r) \subseteq U\}$$

On a clairement $A \subseteq U$. Inversement, soit $a \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $\overline{B}(a, \alpha) \subseteq U$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r \leq \alpha$. On a $\overline{B}(a, r) \subseteq \overline{B}(a, \alpha) \subseteq U$. Encore par la densité de $\mathbb{Q}$, il existe un rationnel $x \in \overline{B}(a, r)$. On a donc $a \in \overline{B}(x, r) \subseteq V$. Ainsi, $a \in V$.

Nous avons ainsi montré que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont à la fois des $\mathcal{G}_\delta$ et des $\mathcal{F}_\sigma$. Par passage au complémentaire, il en est de même des fermés. $\square$

Il est naturel de se demander s'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont des $\mathcal{F}_\sigma$ mais pas des $\mathcal{G}_\delta$ (et vice versa). La réponse est oui.

Proposition 2. $\mathbb{Q}$ est un $\mathcal{F}_\sigma$ mais n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$. $\mathbb{Q}^c$ est un $\mathcal{G}_\delta$ mais n'est pas un $\mathcal{F}_\sigma$.

Démonstration. $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ est une réunion dénombrable de fermés, c'est donc un $\mathcal{F}_\sigma$. Par passage au complémentaire, $\mathbb{Q}^c$ est un $\mathcal{G}_\delta$.

Supposons que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ où les U_n sont des ensembles ouverts. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subseteq U_n$, donc U_n est dense dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\mathbb{Q}^c = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}^c$$

est aussi une intersection dénombrable d'ouverts denses. De là, $\emptyset = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c$ est une intersection d'ouverts denses, ce qui contredit le *théorème de Baire*, qui dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est encore un ensemble dense. $\square$

Existe-t-il des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont ni des $\mathcal{F}_\sigma$ ni des $\mathcal{G}_\delta$? La réponse est oui. Par exemple, une réunion dénombrable de $\mathcal{G}_\delta$ ou une intersection dénombrable de $\mathcal{F}_\sigma$ peuvent n'être ni un $\mathcal{G}_\delta$, ni un $\mathcal{F}_\sigma$. Cela n'a rien d'évident et nous y intéresser nous éloignerait du but de cet article.

3 La structure de $C(f)$

Donnons nous une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $C_\varepsilon(f)$ l'ensemble des réels a tels que

$$\exists \alpha > 0, \forall x, x' \in B(a, \alpha), |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Lemme 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon(f)$ est ouvert.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a \in C_\varepsilon(f)$. Soit $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, x' \in B(a, \alpha)$, $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.

Soit $b \in B(a, \alpha)$. Soit $\beta > 0$ tel que $B(b, \beta) \subseteq B(a, \alpha)$. On a alors pour tous $x, x' \in B(b, \beta)$, $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Ainsi, $b \in C_\varepsilon(f)$. Nous venons de montrer que $B(a, \alpha) \subseteq C_\varepsilon(f)$. L'ensemble $C_\varepsilon(f)$ est donc ouvert. $\square$

Notons

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_{\frac{1}{n}}(f)$$

Par la proposition précédente, G est un $\mathcal{G}_\delta$.

lemme 4. $C(f) \subseteq G$.

Démonstration. Soit $a \in C(f)$. Soit $n \geq 1$. Par la continuité de f en a , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in B(a, \alpha) \implies |f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{2n}$$

Soient $x, x' \in B(a, \alpha)$. On a

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(x')| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Ainsi, $A \in C_{\frac{1}{n}}(f)$. $\square$

Lemme 5. $G \subseteq C(f)$.

Démonstration. Soit $a \in G$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Comme $a \in C_{\frac{1}{n}}(f)$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, x' \in B(a, \alpha)$, $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{n}$.

Soit $x \in B(a, \alpha)$. Comme on a évidemment $a \in B(a, \alpha)$, on en déduit que $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. La fonction f est donc continue en a . $\square$

Les trois lemmes précédents nous donnent le résultat suivant.

Proposition 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble $C(f)$ est un $\mathcal{G}_\delta$. L'ensemble $D(f)$ est un $\mathcal{F}_\sigma$.

Remarquons le corollaire

Corollaire 7. Il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}^c$.

Démonstration. En effet, $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathcal{G}_\delta$. $\square$

Remarque. Il est en revanche possible de construire une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}^c$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, la *fonction de Thomae* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}^c$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Nous verrons réapparaître cette fonction à la fin de l'article.

4 Une réciproque

Nous venons de voir que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un $\mathcal{G}_\delta$. Inversement, si G est un $\mathcal{G}_\delta$, existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $C(f) = G$? Nous allons voir que oui.

Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés de $\mathbb{R}$. Soit $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Considérons la fonction $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mu(x) = \min\{n \geq 1, x \in F_n\}$$

en convenant que $\min \emptyset = +\infty$. On a donc pour tout réel x , $\mu(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in F^c$.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ telle que A et A^c soient denses dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

- $f(x) = \frac{1}{\mu(x)}$ si $x \in A$.
- $f(x) = -\frac{1}{\mu(x)}$ si $x \in A^c$.

en convenant que $\frac{1}{+\infty} = 0$. On a donc pour tout réel x , $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in F^c$.

Proposition 8. $C(f) = F^c$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Cas 1, $a \in F \cap A$. On a donc $f(a) > 0$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de A^c qui tend vers a . On a pour tout $n \geq 1$, $f(x_n) < 0$ et donc $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(a)$ lorsque n tend vers l'infini. La fonction f n'est donc pas continue en a .
- Cas 2, $a \in F \cap A^c$. En inversant les rôles de A et A^c on montre de même que f n'est pas continue en a .
- Cas 3, $a \in F^c$. On a donc $f(a) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. L'ensemble $\Omega = (\bigcup_{k=1}^n F_k)^c$, complémentaire d'une réunion finie de fermés, est un ouvert. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ si et seulement si $|f(x)| < \frac{1}{n}$. En particulier, $a \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subseteq \Omega$. On a pour tout $x \in B(a, \alpha)$,

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Ainsi, f est continue en a .

□

Un cas particulier. Pour tout $q \geq 1$, prenons pour F_q l'ensemble des rationnels x dont le dénominateur est inférieur ou égal à q . On a

$$F_q = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Clairement, F_q est un fermé de $\mathbb{R}$. De plus, $F = \bigcup_{q \geq 1} F_q = \mathbb{Q}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- Si $x \in \mathbb{Q}^c$, $\mu(x) = +\infty$.
- Si $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, $\mu(x) = q$.

Prenons maintenant $A = \mathbb{Q}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- Si $x \in \mathbb{Q}^c$, $f(x) = 0$.
- Si $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, $f(x) = \frac{1}{q}$.

On retrouve donc la fonction de Thomae, dont voici le graphe sur le segment $[0, 1]$.

