

# Endomorphismes de $\mathbb{C}$

Marc Lorenzi

16 juillet 2025

**Proposition 1.** *Le seul endomorphisme du corps  $\mathbb{R}$  est  $\text{id}_{\mathbb{R}}$ .*

**Démonstration.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}$ . On a facilement pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = x$ . De plus,  $f$  est croissant. En effet, soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x \leq y$ . On a

$$f(y) - f(x) = f(y - x) = f(\sqrt{y - x}^2) = f(\sqrt{y - x})^2 \geq 0$$

Soit maintenant  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$  tels que

$$x - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x \leq b_n \leq x + \frac{1}{n}$$

Par la croissance de  $f$ ,

$$f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$$

Comme  $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ , on a  $f(a_n) = a_n$  et  $f(b_n) = b_n$ . De là,

$$x - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{n}$$

ou encore

$$|f(x) - x| \leq \frac{1}{n}$$

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $f(x) = x$ .  $\square$

**Proposition 2.** *Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}$  tel que  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . Alors,  $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$  ou  $f$  est la fonction de conjugaison.*

**Démonstration.** Comme  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ,  $f$  induit un endomorphisme du corps  $\mathbb{R}$ . Par la proposition précédente, on a pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x$ . Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , où  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a

$$f(z) = f(x) + f(i)f(y) = x + f(i)y$$

Par ailleurs,

$$f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$$

et ainsi  $f(i) = \pm i$ . Si  $f(i) = i$ ,  $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ . Si  $f(i) = -i$ ,  $f$  est la fonction  $z \mapsto \bar{z}$ .  $\square$

**Définition 1.** Nous appellerons *endomorphisme sauvage* de  $\mathbb{C}$  tout endomorphisme de  $\mathbb{C}$  différent de l'identité et de la conjugaison.

**Proposition 3.** Soit  $f$  un endomorphisme sauvage de  $\mathbb{C}$ . Alors  $f(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .

**Démonstration.** Comme  $f$  est sauvage,  $f(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}$ . Il existe donc un réel  $t$  tel que  $f(t) \notin \mathbb{R}$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La famille  $(1, f(t))$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . Il existe donc  $x, y \in \mathbb{R}$  (uniques) tels que  $z = x + f(t)y$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $u, v \in \mathbb{Q}$  tels que

$$|x - u| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ et } |y - v| \leq \frac{1}{2|f(t)|}\varepsilon$$

Posons  $w = u + vt$ . On a  $w \in \mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} |z - f(w)| &= |x + f(t)y - f(u + vt)| \\ &= |x + f(t)y - u - f(t)v| \\ &= |(x - u) + f(t)(y - v)| \\ &\leq |x - u| + |f(t)||y - v| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  est discontinu en 0, alors  $f$  est discontinu en tout point.

**Démonstration.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Supposons  $f$  continue en  $a$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|z - a| \leq \alpha \implies |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha > 0$  donné par la propriété ci-dessus. Soit  $w \in \mathbb{C}$ . Supposons que  $|w| \leq \alpha$ . Posons  $z = w + a$ . On a  $|z - a| \leq \alpha$ , donc

$$|f(w)| = |f(z - a)| = |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Ainsi,  $f$  est continu en 0, d'où le résultat en contraposant. □

**Proposition 5.** Un endomorphisme sauvage de  $\mathbb{C}$  est discontinu en tout point.

**Démonstration.** Soit  $f$  un endomorphisme sauvage de  $\mathbb{C}$ . Comme  $f$  est sauvage, il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) \neq a$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rationnels qui tend vers  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $b_n = a_n - a$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $b_n$  tend vers 0. En revanche,

$$f(b_n) = f(a_n - a) = f(a_n) - f(a) = a_n - f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - f(a) \neq 0$$

et donc  $f(b_n)$  ne tend pas vers  $f(0)$ . L'endomorphisme  $f$  est donc discontinu en 0. □

Il existe beaucoup d'endomorphismes sauvages de  $\mathbb{C}$ . On peut montrer, en utilisant le lemme de Zorn, que tout *automorphisme* d'un sous corps de  $\mathbb{C}$  peut être prolongé en un automorphisme de  $\mathbb{C}$ . Par exemple, soit

$$\mathbb{K} = \{x + y\sqrt{2}, x, y \in \mathbb{Q}\}$$

L'application  $x + y\sqrt{2} \mapsto x - y\sqrt{2}$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}$ . Cette application se prolonge donc en un automorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}$  qui n'est pas l'identité sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ . On peut en fait montrer que l'ensemble des automorphismes de  $\mathbb{C}$  est de cardinal  $2^{2^{\aleph_0}}$ . Cet ensemble a donc le même cardinal que  $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ , l'ensemble de *toutes* les fonctions de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$ .