

Un « gros » e.v.n qui n'est pas un Banach

Marc Lorenzi

18 février 2022

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 2])$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 2]$. Munissons E de la norme

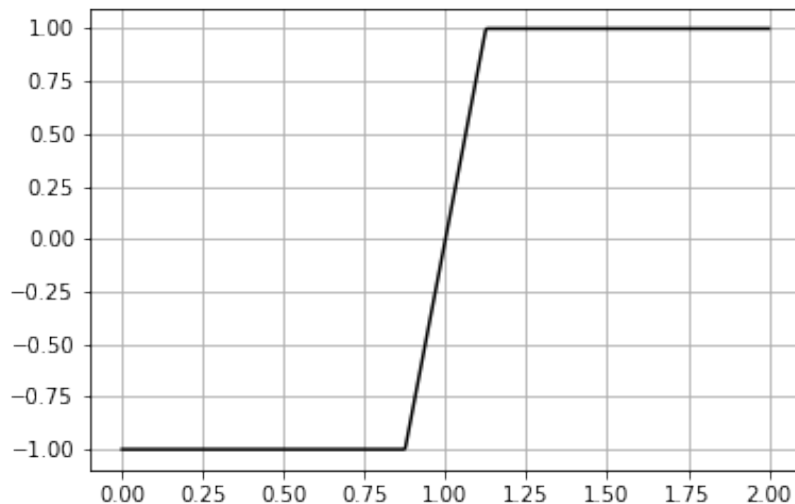
$$\|f\| = \int_0^2 |f|$$

Proposition 1. $(E, \|\bullet\|)$ n'est pas un espace de Banach.

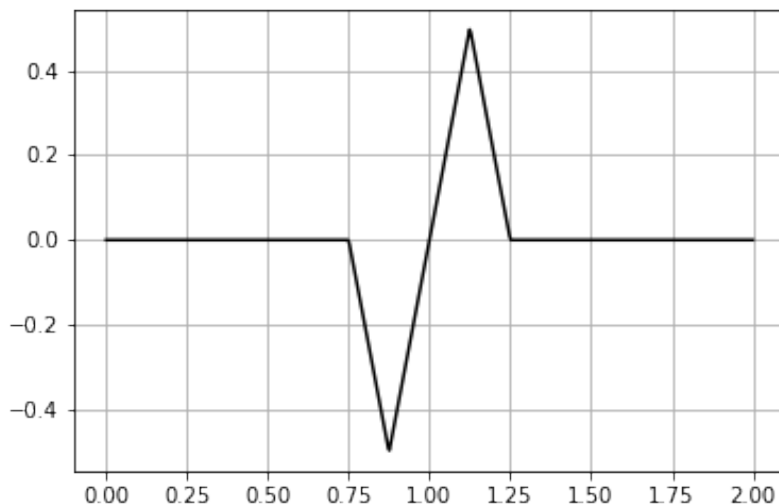
Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 2]$ par :

- Si $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$, $f_n(x) = -1$.
- Si $1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}$, $f_n(x) = n(x - 1)$.
- Si $1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 2$, $f_n(x) = 1$.

Voici le graphe de f_8 .



On vérifie facilement que $f_n \in E$. Soient $m, n \geq 1$. Supposons par exemple $m \geq n$. Ci-dessous, le graphe de $f_8 - f_4$.



On a $f_m = f_n = -1$ sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ et $f_m = f_n = 1$ sur $[1 + \frac{1}{n}, 2]$. De plus, pour tout $x \in [0, 2]$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x)| + |f_n(x)| \leq 2$$

De là,

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\| &= \int_0^2 |f_m - f_n| \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \\ &\leq 2 \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} dx \\ &= \frac{4}{n} \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\bullet\|)$.

Supposons maintenant que cette suite converge vers $f \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geq N$,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} |1 + f(x)| dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f_n - f| \leq \int_0^2 |f_n - f| \leq \varepsilon$$

La fonction f étant continue sur $[0, 1]$,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} |1 + f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |1 + f(x)| dx$$

On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |1 + f(x)| dx \leq \varepsilon$$

d'où

$$\int_0^1 |1 + f(x)| dx = 0$$

N'oublions pas que f est continue sur $[0, 1]$. Par le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = -1$. En particulier, $f(1) = -1$.

Par la même démonstration, on obtient que pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = 1$, et donc $f(1) = 1$. Contradiction.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ diverge. Pourtant, c'est une suite de Cauchy. $\square$

Montrons maintenant que E est un « gros » espace vectoriel.

Proposition 2. *E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie non dénombrable.*

Démonstration. Notons dans ce qui suit $I =]0, 2[$. Pour tout $a \in I$, soit $f_a \in E$ définie par $f_a(x) = |x - a|$. Remarquons que f_a n'est pas dérivable en a , mais est dérivable en tout $x \neq a$. Considérons la famille $\mathcal{F} = (f_a)_{a \in I}$. La famille $\mathcal{F}$ est infinie, non dénombrable. Son cardinal est en fait celui de l'intervalle I , qui est le même que le cardinal de $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Pour cela, soit $(\lambda_a)_{a \in I}$ une famille presque nulle de réels. Supposons que

$$\sum_{a \in I} \lambda_a f_a = 0$$

Soit $a_0 \in I$. Écrivons

$$\lambda_{a_0} f_{a_0} = - \sum_{a \neq a_0} \lambda_a f_a$$

Le membre de droite de cette égalité est dérivable en a_0 . Le membre de gauche l'est donc aussi. Or, f_{a_0} n'est pas dérivable en a_0 . Il en résulte que $\lambda_{a_0} = 0$. $\square$

Remarque 1. En utilisant un peu de théorie des cardinaux infinis, ce que nous avons montré c'est que

$$\dim E \geq \text{card } \mathcal{F} = \text{card } I = \text{card } \mathbb{R}$$

Grâce à la remarque suivante, nous pourrions montrer que l'on a en fait égalité.

Remarque 2. Pourquoi le mot « gros » dans le titre est-il entouré de guillemets ? Eh bien, parce que E n'est pas si gros que cela. Certes, c'est un espace vectoriel réel de dimension infinie non dénombrable, mais quel est le cardinal de E ?

Soit $F = \mathbb{R}^{[0,2] \cap \mathbb{Q}}$ l'ensemble des fonctions de $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$. Considérons l'application $\varphi : E \longrightarrow F$ qui à toute fonction $f \in E$ associe sa restriction à $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$. Soient $f, g \in E$. Supposons $\varphi(f) = \varphi(g)$. On a donc, pour tout rationnel $x \in [0, 2]$, $f(x) = g(x)$. Les fonctions f et g étant continues sur $[0, 2]$, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ permet facilement de montrer que $f = g$. Ainsi, φ est

injective. On en déduit que le cardinal de E est au plus égal à celui de F . Mais quel est le cardinal de F ? La théorie des cardinaux infinis permet de justifier la ligne ci-dessous ($\aleph_0$ est le cardinal du dénombrable).

$$\text{card } E \leq \text{card } F = (\text{card } \mathbb{R})^{\text{card } \mathbb{Q}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \text{card } \mathbb{R}$$

Par ailleurs, la fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow E$ qui à tout réel a associe la fonction constante égale à a est injective. On a donc $\text{card } \mathbb{R} \leq \text{card } E$. Finalement,

$$\text{card } E = \text{card } \mathbb{R}$$

Il n'y a pas plus de fonctions continues que de nombres réels.

Proposition 3. $\dim E = \text{card } \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous avons déjà montré que $\dim E \geq \text{card } \mathbb{R}$. Pour prouver l'autre inégalité, donnons-nous une base $\mathcal{B}$ de E . Une base est une famille de vecteurs de E , son cardinal est donc inférieur à celui de E . On a ainsi

$$\dim E = \text{card } \mathcal{B} \leq \text{card } E = \text{card } \mathbb{R}$$

□