

Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Marc Lorenzi

19 octobre 2022

Théorème 1. [BOLZANO-WEIERSTRASS]

De toute suite bornée de réels on peut extraire une suite convergente.

Nous allons démontrer ce théorème en plusieurs étapes. Donnons-nous une suite réelle u . Supposons que u est bornée.

Définition 1. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, notons $\mathcal{P}(A)$ la propriété « A contient une infinité de termes de la suite u ».

Précisément, on a $\mathcal{P}(A)$ si et seulement si l'ensemble

$$u^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} : u_n \in A\}$$

est un ensemble infini.

Remarque. Si $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ et $B \cup C = A$, alors

$$\mathcal{P}(A) \iff \mathcal{P}(B) \text{ ou } \mathcal{P}(C)$$

En effet,

$$u^{-1}(A) = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(C)$$

et une réunion finie d'ensembles est infinie si et seulement si l'un au moins des ensembles est infini.

Étape 1. *Construisons par récurrence sur n deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathcal{P}([a_n, b_n])$.*

- Rappelons que la suite u est bornée. Appelons a_0 un minorant de la suite u et b_0 un majorant de u . Remarquons que le segment $[a_0, b_0]$ contient tous les termes de la suite u . On a donc $\mathcal{P}([a_0, b_0])$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits a_n et b_n tels que l'on ait $\mathcal{P}([a_n, b_n])$. Soit $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Comme $[a_n, c_n] \cup [c_n, b_n] = [a_n, b_n]$, on a $\mathcal{P}([a_n, c_n])$ ou $\mathcal{P}([c_n, b_n])$.
 - (1) Si $\mathcal{P}([a_n, c_n])$ est vérifiée, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
 - (2) Sinon, par la remarque faite un peu plus haut, on a $\mathcal{P}([c_n, b_n])$. On pose alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Lemme 2. *Les suites a et b sont adjacentes.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on est dans le cas (1) ci-dessus, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n \leq b_n$. Si on est dans le cas (2), alors $a_{n+1} = c_n \geq a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Ainsi, la suite a croît et la suite b décroît.

Il reste à montrer que la suite $b - a$ tend vers 0. Remarquons que dans le cas (1),

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

et dans le cas (2),

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

La suite $b - a$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Ainsi, $b - a \longrightarrow 0$. $\square$

Les suites adjacentes a et b convergent ainsi vers une même limite que nous noterons ℓ .

Étape 2. *Construisons maintenant par récurrence sur n une suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.*

- Rappelons que $u^{-1}([a_0, b_0]) = \mathbb{N}$. Posons donc, par exemple, $\varphi(0) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construit un entier $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. On a $\mathcal{P}([a_{n+1}, b_{n+1}])$, c'est à dire qu'il existe une infinité d'entiers m tels que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. On choisit un tel entier $m > \varphi(n)$ et on pose $\varphi(n+1) = m$.

La suite φ définit une suite extraite de u . C'est la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Lemme 3. *La suite v converge vers ℓ .*

Démonstration. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$, c'est à dire

$$a_n \leq v_n \leq b_n$$

Les suites a et b convergent vers ℓ . Par le théorème d'encadrement, la suite v converge aussi vers ℓ . $\square$