

Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Marc Lorenzi

9 octobre 2025

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$E_n = \{u_k : k \geq n\}$$

et

$$U_n = \sup E_n$$

Remarquons que comme la suite u est majorée, U_n est bien défini.

Proposition 1. *La suite U est décroissante.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $E_{n+1} \subseteq E_n$, donc (cf l'exercice 1 du TD sur $\mathbb{R}$)

$$U_{n+1} = \sup E_{n+1} \leq \sup E_n = U_n$$

□

Proposition 2. *La suite U est minorée.*

Démonstration. Soit m un minorant de la suite u . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, m minore E_n et donc $m \leq \sup E_n = U_n$. □

La suite U est donc convergente. Appelons ℓ sa limite. Le réel ℓ est la limite supérieure de u .

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence forte comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)$ (ne supposons rien si $n = 0$). Soit $k > \varphi(n-1)$ (juste « soit $k \in \mathbb{N}$ » si $n = 0$) tel que

$$U_k \leq \ell + \frac{1}{2^n}$$

L'existence d'un tel k est assurée par le fait que U tend vers ℓ . Prenons un tel k minimal.

Par définition d'une borne supérieure, il existe $j \geq k$ tel que $u_j \in E_k$ et

$$U_k - \frac{1}{2^n} < u_j \leq U_k$$

Prenons un tel j minimal et appelons le $\varphi(n)$. On a donc

$$\ell - \frac{1}{2^n} \leq U_k - \frac{1}{2^n} < u_{\varphi(n)} \leq U_k \leq \ell + \frac{1}{2^n}$$

Remarquons que la fonction φ est clairement strictement croissante. Nous venons donc de définir une suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite u .

Proposition 3. *La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell - \frac{1}{2^n} \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell + \frac{1}{2^n}$$

d'où le résultat par le théorème des gendarmes. $\square$