

Remarque. Ce qui suit utilise plusieurs fois la propriété suivante, que j'appellerai $(\star)$: si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue en x si et seulement si pour toute suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers x , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$.

Proposition 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose f périodique et continue en au moins un réel. Si f est non constante, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{T}(f) = \alpha\mathbb{Z}$.

Démonstration. Supposons f périodique et continue en un réel a . Supposons que $\mathcal{T}(f)$ n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Comme $\mathcal{T}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que f est constante.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{T}(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}(f)$ qui converge vers $x - a$. On a donc $x - T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

La fonction f est continue en a , donc, par la propriété $(\star)$, $f(x - T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$. Les T_n étant des périodes de f , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x - T_n) = f(x)$. Ainsi, la suite constante $(f(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ lorsque n tend vers l'infini. De là, $f(x) = f(a)$. La fonction f est constante. Remarquons que, a posteriori, $\mathcal{T}(f) = \mathbb{R}$. $\square$

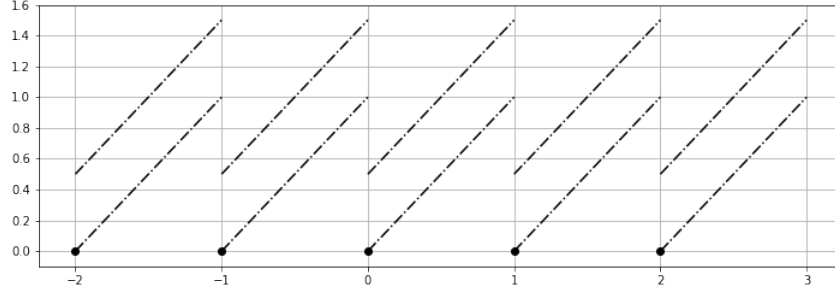
La « réciproque » de cette proposition est fausse. Il existe des fonctions discontinues en tout point, périodiques, dont l'ensemble des périodes est discret.

Proposition 2. Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\mathcal{T}(f) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $\varphi : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction toute pourrie. Par exemple, $\varphi(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}$ sinon. On prolonge φ en une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout réel x ,

$$f(x) = \varphi(x - [x])$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x . Ci-dessous, le graphe de f .



Montrons que f est discontinue sur $\mathbb{R}$. Donnons-nous un réel x .

- Cas 1, $x \in \mathbb{Q}$. Par la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$ il existe $u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < u_n < x + \frac{1}{n}$. Par le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(u_n) = \varphi(u_n - [u_n]) = u_n - [u_n] + \frac{1}{2}$$

En effet, $u_n - [u_n] \notin \mathbb{Q}$. Les u_n étant supérieurs ou égaux à x et tendant vers x , pour tout n assez grand, $[u_n] = [x]$ et donc

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x - [x] + \frac{1}{2} \neq f(x)$$

En effet, $x - [x] \in \mathbb{Q}$ et donc $f(x) = x - [x]$. Par la propriété $(\star)$, la fonction f n'est donc pas continue en x .

- Cas 2, $x \notin \mathbb{Q}$. Comme dans le cas 1, mais cette fois-ci par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de rationnels telle que $u_n \geq x$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ lorsque n tend vers l'infini. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(u_n) = \varphi(u_n - [u_n]) = u_n - [u_n]$$

En effet, $u_n - [u_n] \in \mathbb{Q}$. Les u_n étant supérieurs ou égaux à x et tendant vers x , pour tout n assez grand, $[u_n] = [x]$ et donc

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x - [x] \neq f(x)$$

En effet, $x - [x] \notin \mathbb{Q}$ et donc $f(x) = x - [x] + \frac{1}{2}$. Par la propriété $(\star)$, la fonction f n'est donc pas continue en x .

Montrons maintenant que $\mathcal{T}(f) = \mathbb{Z}$.

Soit $T \in]0, 1[$. On a $f(T) = T$ ou $f(T) = T + \frac{1}{2}$, selon que T est rationnel ou pas. Comme $f(0) = 0$, on a donc $f(T) \neq f(0)$ ou encore $f(0+T) \neq f(0)$. Ainsi, $T \notin \mathcal{T}(f)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = \varphi(x+1 - [x+1]) = \varphi(x - [x]) = f(x)$$

et donc $1 \in \mathcal{T}(f)$. Ainsi, 1 est la plus petite période strictement positive de f et donc $\mathcal{T}(f) = \mathbb{Z}$. $\square$