

Théorème. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Le polynôme P admet alors une racine.

Démonstration. On se donne un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et on suppose que P ne s'annule pas. On va aboutir à une contradiction. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

Étape 1 : On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|$$

On voit donc que $\frac{|P(z)|}{|z|^n}$ tend vers $|a_n|$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, et donc $|P(z)|$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers l'infini. Il existe donc $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ implique $|P(z)| > 2|P(0)|$.

Étape 2 : La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur le disque fermé D de centre O et de rayon R , elle y admet donc un minimum (utiliser Bolzano-Weierstrass). Il existe donc $z_0 \in D$ tel que pour tout $z \in D$ on ait $|P(z_0)| \leq |P(z)|$. Mais $0 \in D$: on a donc en fait $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < |P(z_0)| \leq |P(z)|$.

Étape 3 : Le polynôme P est non constant. Il admet donc une dérivée d'ordre supérieur ou égal à 1 non nulle en z_0 (formule de Taylor pour les polynômes). Soit k le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $w = P^{(k)}(z_0) \neq 0$. On peut alors écrire, toujours grâce à la formule de Taylor,

$$P(z_0 + h) = P(z_0) + \frac{h^k}{k!} w + h^k \epsilon(h)$$

où $\epsilon(h)$ tend vers 0 lorsque $|h|$ tend vers 0. En posant $h = re^{i\theta}$, il vient

$$P(z_0 + re^{i\theta}) = P(z_0) + \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} w + r^k \epsilon(r)$$

où $\epsilon(r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0. On en déduit

$$\begin{aligned} |P(z_0 + re^{i\theta})|^2 &= (P(z_0) + \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} w + r^k \epsilon(r)) (\overline{P(z_0)} + \frac{r^k e^{-ik\theta}}{k!} \overline{w} + r^k \epsilon(r)) \\ &= |P(z_0)|^2 + A \frac{r^k}{k!} + r^k \epsilon(r) \end{aligned}$$

où $A = e^{ik\theta} \overline{P(z_0)} w + e^{-ik\theta} P(z_0) \overline{w} = 2\Re(e^{ik\theta} \overline{P(z_0)} w)$. On a donc $|P(z_0 + re^{i\theta})|^2 - |P(z_0)|^2 \sim A \frac{r^k}{k!}$, et est donc de signe de A lorsque $r > 0$ est suffisamment petit.

Étape 4 : Posons maintenant $\overline{P(z_0)} w = ae^{i\alpha}$, où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $A = 2\Re(ae^{i(k\theta+\alpha)}) = 2a \cos(k\theta+\alpha)$ et cette quantité prend des valeurs strictement négatives pour certaines valeurs de θ . Il existe donc des nombres complexes h tels que $|P(z_0 + h)| < |P(z_0)|$. Contradiction.