

Densité

Marc Lorenzi

28 avril 2021

Résumé

On montre dans cet article que la notion de densité est une notion relative. Elle dépend de la façon dont on envisage la convergence des suites et il y a plusieurs façons de définir cette convergence.

Dans tout l'article, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$.

On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_m([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Nous notons enfin $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1 Espaces métriques

1.1 Distances

Pour pouvoir parler de convergence de suites à valeurs dans un ensemble E , il faut munir E de ce que l'on appelle une *topologie*. Nous allons ici regarder des topologies particulières, définies par ce que l'on appelle des *distances*.

Définition 1. Soit E un ensemble. Soit $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$. On dit que d est une *distance* sur E lorsque

- (D_1) Symétrie : pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$.
- (D_2) Pour tout $x \in E$, $d(x, x) = 0$.
- (D_3) Pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \implies x = y$.
- (D_4) Inégalité triangulaire : pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d vérifie seulement (D_1), (D_2) et (D_4) on dit que d est une *pseudo-distance*.

Un couple (E, d) où E est un ensemble et d est une (pseudo-) distance sur E est appelé un *espace métrique*.

Une fois que E a été muni d'une (pseudo-) distance d , il est facile de parler de convergence de suites. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si $d(x_n, x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En explicitant : x_n tend vers x lorsque n tend vers l'infini si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Lorsque d est une « vraie » distance, toutes les propriétés usuelles des limites sont vérifiées, comme par exemple l'unicité de la limite, les opérations raisonnables sur les limites (par exemple, si E est un espace vectoriel, limite d'une somme, d'un produit par un scalaire), le théorème des gendarmes, toute suite convergente est bornée, etc.

Dans le cas d'une pseudo-distance, beaucoup de propriétés sont préservées mais il faut noter qu'on perd l'unicité de la limite. En effet, si x_n tend vers x , alors x_n tend aussi vers tous les y tels que $d(x, y) = 0$.

1.2 Deux exemples de (pseudo-) distances

Dans toute la suite, nous travaillerons sur deux exemples. Pour $f, g \in \mathcal{C}_m$, notons

$$d_1(f, g) = \int_a^b |g - f|$$

et

$$d_\infty(f, g) = \max\{|g(x) - f(x)|, x \in [a, b]\}$$

Proposition 1. $(\mathcal{C}, d_\infty)$ est un espace métrique et $(\mathcal{C}_m, d_\infty)$ est un espace pseudo-métrique.

Démonstration. Facile, laissée au lecteur. $\square$

Proposition 2. $(\mathcal{C}, d_1)$ est un espace métrique et $(\mathcal{C}_m, d_1)$ est un espace pseudo-métrique.

Démonstration.

- La symétrie de d_1 est évidente.
- Soient $f, g \in \mathcal{C}_m$. La fonction $|g - f|$ est positive et $a < b$, donc, par le théorème de positivité de l'intégrale, $d_1(f, g) \geq 0$.
- Soient $f, g \in \mathcal{C}$. Si $f = g$, on a évidemment $d_1(f, g) = 0$. Inversement, supposons $d_1(f, g) = 0$. La fonction $|g - f|$ est **positive, continue**, et son intégrale sur $[a, b]$ est nulle. Par le théorème de nullité de l'intégrale, $|g - f| = 0$ et donc $f = g$. Remarquons que si f et g sont seulement continues par morceaux, cette propriété n'est plus vérifiée.
- Soient $f, g, h \in \mathcal{C}_m$. On a

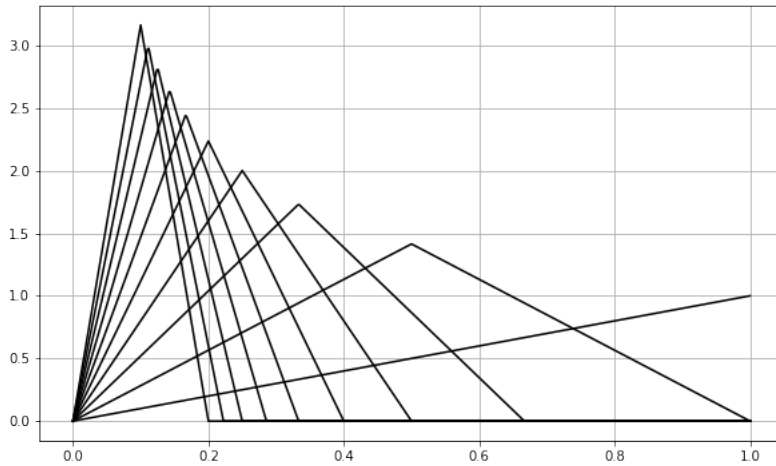
$$\begin{aligned} d_1(f, h) &= \int_a^b |h - f| \\ &= \int_a^b |(h - g) + (g - f)| \\ &\leq \int_a^b (|h - g| + |g - f|) \quad (\text{croissance de l'intégrale}) \\ &= \int_a^b |h - g| + \int_a^b |g - f| \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= d_1(f, g) + d_1(g, h) \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Une suite de fonctions

Prenons $a = 0$ et $b = 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit. Pour tout $x \in [0, 1]$,

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = n\sqrt{n}x$.
- Si $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$, $f_n(x) = 2\sqrt{n} - n\sqrt{n}x$.
- Si $\frac{2}{n} \leq x \leq 1$, $f_n(x) = 0$.



Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est affine par morceaux et elle appartient clairement à $\mathcal{C}$. Pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 f_n(x) dx$ est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur $\sqrt{n}$. Ainsi,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dit autrement,

$$d_1(f_n, 0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ainsi, pour la distance d_1 , f_n tend vers 0 (où 0 désigne la fonction nulle) lorsque n tend vers l'infini. Au vu du graphique, ce résultat peut paraître surprenant. La raison en est que la notion intuitive de convergence d'une suite de fonctions est plutôt la convergence pour la distance d_∞ , que l'on appelle la *convergence uniforme*. Il s'avère que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ diverge pour la distance d_∞ . En effet,

$$d_\infty(f_n, 0) = \max_{[0,1]} |f_n| = \sqrt{n}$$

et donc, pour la distance d_∞ , la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est divergente. En effet, il est facile de montrer que si la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge pour la distance d_∞ , alors la suite $(d_\infty(f_n, 0))_{n \geq 1}$ est majorée.

Ainsi, la notion de limite dépend de la distance dont on a muni l'ensemble. Une suite peut converger pour une distance donnée, et diverger pour une autre distance.

1.4 Densité

Dans un espace pseudo-métrique, on peut définir la notion de *partie dense*.

Définition 2. Soit (E, d) un espace pseudo-métrique. Soit $A \subset E$. On dit que A est dense dans E lorsque

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, d(x, a) \leq \varepsilon$$

Proposition 3. Soit (E, d) un espace pseudo-métrique. Soit $A \subset E$. A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est la limite d'une suite d'éléments de A .

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que A est dense dans E . Soit $x \in E$. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe donc $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x) \leq \frac{1}{n}$. Par le théorème d'encadrement des limites, $d(a_n, x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, c'est à dire a_n tend vers x .

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément de E est la limite d'une suite d'éléments de A . Soit $x \in E$. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers x . Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par la définition de limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(a_n, x) \leq \varepsilon$. En particulier, $d(a_N, x) \leq \varepsilon$.

□

1.5 Densité et fonctions continues par morceaux

Rappelons que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Proposition 4. Pour les pseudo-distances d_∞ et d_1 , $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{C}_m$.

Démonstration.

- Soit $f \in \mathcal{C}_m$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 7 du chapitre d'intégration, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$. De là,

$$0 \leq f - \varphi \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

Dit autrement,

$$d_\infty(\varphi, f) \leq \varepsilon$$

- En reprenant la démonstration précédente avec $\frac{\varepsilon}{b-a}$ à la place de ε ,

$$\begin{aligned} d_1(\varphi, f) &= \int_a^b |\varphi - f| = \int_a^b (f - \varphi) \\ &\leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

2 Fonctions intégrables

2.1 C'est quoi ?

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *bornée*. Comme f est bornée il existe une fonction en escalier (constante, en fait) qui minore f et une fonction en escalier qui majore f . Les ensembles

$$E_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}, \varphi \leq f \right\}$$

et

$$E_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}, f \leq \psi \right\}$$

sont donc non vides. On montre aisément que pour tout $x \in E_-(f)$, pour tout $y \in E_+(f)$, $x \leq y$. Ainsi, $E_-(f)$ possède une borne supérieure, $E_+(f)$ possède une borne inférieure, et

$$\sup E_-(f) \leq \inf E_+(f)$$

Définition 3. La fonction f est dite *intégrable* sur $[a, b]$ lorsque

$$\sup E_-(f) = \inf E_+(f)$$

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est alors la valeur commune de ces deux nombres.

Le théorème 7 du cours d'intégration montre que toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable.

Nous noterons $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$. On a donc

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_m \subset \mathcal{I}$$

Les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, croissance, Chasles) restent valides dans $\mathcal{I}$. Les pseudo-distances d_1 et d_∞ s'étendent à $\mathcal{I}$ et munissent $\mathcal{I}$ de deux structures d'espace pseudo-métrique. Nous allons voir que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $(\mathcal{I}, d_1)$, **mais pas** dans $(\mathcal{I}, d_\infty)$.

2.2 Densité et fonctions intégrables

Proposition 5. Pour la distance d_1 , $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{I}$.

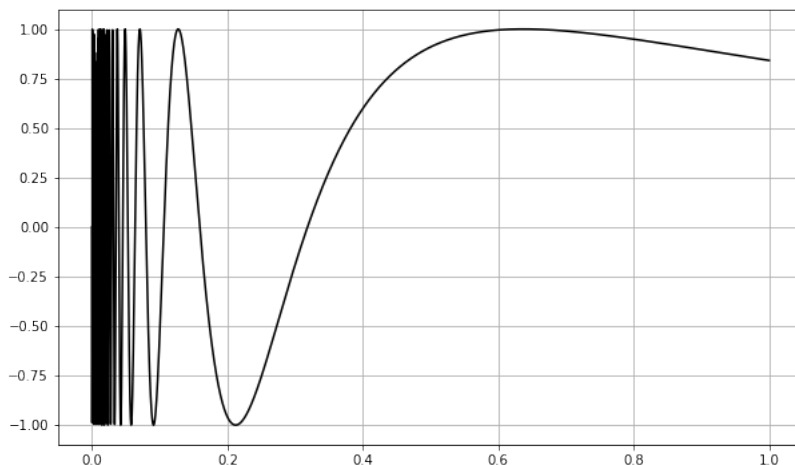
Démonstration. Soit $f \in \mathcal{I}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable, il existe $x \in E_-(f)$ et $y \in E_+(f)$ tels que $0 \leq y - x \leq \varepsilon$. Dit autrement, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$. De là,

$$\begin{aligned} d_1(\varphi, f) &= \int_a^b |\varphi - f| = \int_a^b (f - \varphi) \\ &\leq \int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.3 Non densité et fonctions intégrables

Dans ce paragraphe nous appelons $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.



La fonction f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, puisqu'elle n'a pas de limite en 0. Néanmoins, elle est intégrable :

Proposition 6. *f est intégrable sur $[0, 1]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur $[\varepsilon, 1]$. Par le théorème 7 du cours d'intégration, il existe donc φ, ψ en escalier sur $[\varepsilon, 1]$ telles que

- Pour tout $x \in [\varepsilon, 1]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$.
- Pour tout $x \in [\varepsilon, 1]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

Prolongeons ces deux fonctions en des fonctions en escalier sur $[0, 1]$ en posant, pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $\varphi(x) = -1$ et $\psi(x) = 1$. On a, sur $[0, 1]$, $\varphi \leq f \leq \psi$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\psi - \varphi) &= \int_0^\varepsilon (\psi - \varphi) + \int_\varepsilon^1 (\psi - \varphi) \\ &= 2\varepsilon + \int_\varepsilon^1 (\psi - \varphi) \\ &\leq 2\varepsilon + (1 - \varepsilon)\varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $x \in E_-(f)$ ($x = \int_0^1 \varphi$) et $y \in E_+(f)$ ($y = \int_0^1 \psi$) tels que

$$0 \leq y - x \leq 3\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup E_-(f) = \inf E_+(f)$ et donc que $f \in \mathcal{I}$. $\square$

Pour la distance d_1 , il existe donc des fonctions en escalier aussi proches que l'on désire de la fonction f . En revanche, le comportement de f au voisinage de 0 empêche les fonctions en escalier de s'approcher, pour la distance d_∞ , « trop près » de f :

Proposition 7. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}$, on a $d_\infty(\varphi, f) \geq 1$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{E}$. Notons $\delta = d_\infty(\varphi, f)$. Soit

$$\sigma = (x_0 = 0, x_1, \dots, x_N = 1)$$

une subdivision adaptée à φ . Soit y_0 la valeur constante de φ sur $]0, x_1[$. Sur l'intervalle $]0, x_1[$, la fonction f prend (une infinité de fois) les valeurs -1 et 1 . Soit $x \in]0, x_1[$ tel que $f(x) = 1$. On a

$$|\varphi(x) - f(x)| = |y_0 - 1| \leq \delta$$

De même, soit $x \in]0, x_1[$ tel que $f(x) = -1$. On a

$$|\varphi(x) - f(x)| = |y_0 + 1| \leq \delta$$

Ainsi,

$$\delta \geq \max(|y_0 - 1|, |y_0 + 1|) \geq 1$$

En effet, $2 = |(1 - y_0) + (1 + y_0)| \leq |1 - y_0| + |1 + y_0|$ et donc l'un des deux réels $|1 - y_0|$ et $|1 + y_0|$ est supérieur ou égal à 1. $\square$

Corollaire 8. *Pour la pseudo-distance d_∞ , $\mathcal{E}$ n'est pas dense dans $\mathcal{I}$.*