

Ce qu'il ne faut jamais faire avec les DLs

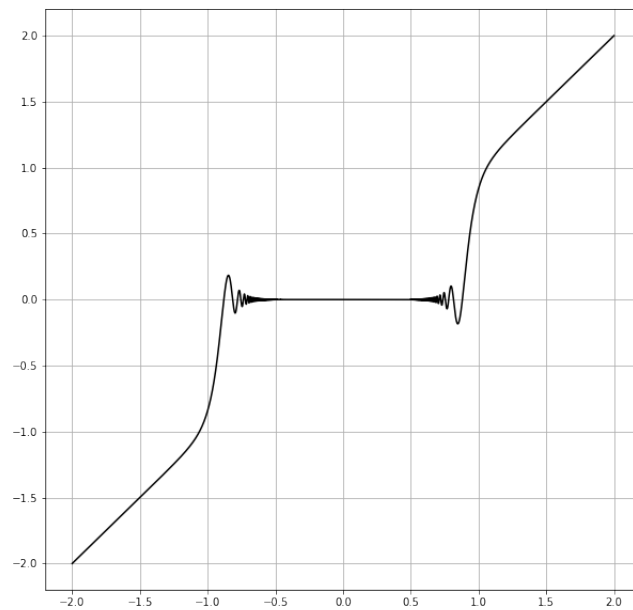
Marc Lorenzi

3 mai 2021

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^{10} \sin \frac{1}{x^9}$$

Voici la courbe de f sur $[-2, 2]$.



La fonction f a un DL à l'ordre 9 en 0, puisque, au voisinage de 0,

$$\left| x^{10} \sin \frac{1}{x^9} \right| \leq |x|^{10} = o(x^9)$$

Plus explicitement, ce DL est

$$f(x) = o(x^9)$$

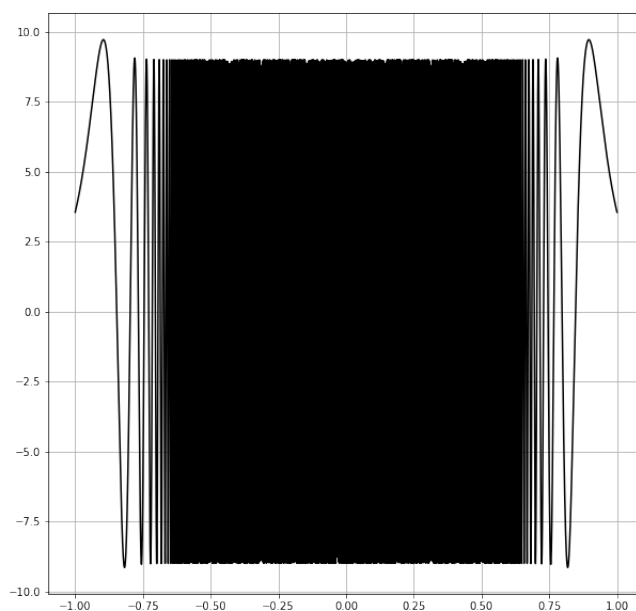
avec une partie principale qui est le polynôme nul.

La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle a un DL à l'ordre 9 en 0, elle a aussi un DL à l'ordre 1. Elle est donc dérivable en 0. Sa dérivée en 0 est $f'(0) = 0$, le coefficient de degré 1 du DL. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 10x^9 \sin \frac{1}{x^9} - 9 \cos \frac{1}{x^9}$$

On constate que f' n'a pas de limite en 0 et donc n'est pas continue en 0. Donc, f' n'a même pas un DL à l'ordre 0 en 0. Ci-dessous, la courbe de f' sur $[-1, 1]$.



Conclusions.

1. f a un DL à l'ordre 9 en 0, et pourtant elle n'est certainement pas 9 fois dérivable en 0. Elle même pas dérivable 2 fois en 0, puisque f' n'est pas continue (donc pas dérivable) en 0. Donc, le fait qu'une fonction ait un DL à un certain ordre $n \geq 2$ ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur la régularité de f à l'ordre n .

Exercice. Recopier 100 fois :

Je ne dirai plus jamais : « Si f a un DL à l'ordre n , alors f est n fois dérivable ».

2. La « dérivée du DL de f en 0 » serait $o(x^8)$. Clairement, f' **n'est pas** un $o(x^8)$ au voisinage de 0, ni d'ailleurs un $o(x^7)$, ni un $o(x^6)$... ni même un $o(x^0)$. En fait, f' n'a même pas de DL à l'ordre 0 en 0. Donc, sauf informations supplémentaires, **on ne dérive pas** un développement limité.

Mais alors, que faire ? Soient f une fonction dérivable au voisinage du réel a et $n \in \mathbb{N}^*$. Appelons A, B, C les propositions suivantes :

- (A) f a un DL à l'ordre n en a .
- (B) f' a un DL à l'ordre $n - 1$ en a .
- (C) le DL de f' est obtenu en dérivant celui de f .

Une lecture attentive et active du théorème d'intégration des DLs nous dit :

Proposition 1. $B \implies A \wedge C$.

Qu'ai-je vu dans les copies ? Ceci.

MACHIN TRÈS FAUX 2. $A \implies B \wedge C$.

Tout le monde verra, je l'espère, la différence.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$B \implies A \wedge C$	$A \implies B \wedge C$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

L'exemple que nous avons étudié dans cet article correspond à la ligne numéro 5, étiquetée par $(A, B, C) = (1, 0, 0)$. Le « machin très faux » nous dit que la ligne 5 du tableau ne peut jamais arriver en mathématiques. Et pourtant nous y sommes !

Exercice. Traduisez en mots les lignes 1, 2, 5, 6 et 8 du tableau, c'est à dire celles où il y a un 1 dans la case $B \implies A \wedge C$.