

Intégration et dérivation fractionnaires

Marc Lorenzi

7 juillet 2026

1 Intégrale de Riemann-Liouville

1.1 Introduction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des fonctions $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continues.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_a$, notons $D_a^{-1}f$ la fonction définie pour tout $x > a$ par

$$D_a^{-1}f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

La fonction D_a^{-1} est la primitive de f qui s'annule en a . Elle appartient elle aussi à $\mathcal{C}_a$. Nous venons ainsi de définir une application linéaire $D_a^{-1} : \mathcal{C}_a \rightarrow \mathcal{C}_a$.

Proposition 1. $\ker D_a^{-1} = \{0\}$ et

$$\operatorname{Im} D_a^{-1} = \{F \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[) : F(a) = 0\}$$

Démonstration. Soit $f \in \ker D_a^{-1}$. Soit $F = D_a^{-1}f$. On a $F = 0$ donc $F' = f = 0$. Ainsi, $\ker D_a^{-1} = \{0\}$.

Soit $F \in \operatorname{Im} J$. Soit $f \in \mathcal{C}_a$ telle que $F = D_a^{-1}f$. La fonction F est dérivable et $F' = f \in \mathcal{C}_a$ donc $F \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$. De plus, par définition de D_a^{-1} , $F(a) = 0$.

Inversement, soit $F \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$ telle que $F(a) = 0$. Soit $f = F'$. On a clairement $F = D_a^{-1}f$, donc $F \in \operatorname{Im} D_a^{-1}$. $\square$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction

$$D_a^{-p} = (D_a^{-1})^p$$

est elle aussi un endomorphisme de $\mathcal{C}_a$. L'endomorphisme D_a^{-p} , composée d'injections, est aussi injectif. On montre facilement que

$$\operatorname{Im} D_a^{-p} = \{F \in \mathcal{C}_a : F(a) = F'(a) = \dots = F^{(p-1)}(a) = 0\}$$

Proposition 2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tout $f \in \mathcal{C}_a$ et tout $x \geq a$,

$$D_a^{-p} f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur p . C'est immédiat pour $p = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée pour p . On a, par une intégration par parties,

$$\int_a^x (t-x)^p f(t) dt = \left[(x-t)^p D_a^{-1} f(t) \right]_a^x + p \int_a^x (x-t)^{p-1} D_a^{-1} f(t) dt$$

Le terme tout intégré est nul : lorsque $t = x$, on a $(t-x)^p = 0$. Et lorsque $t = a$, on a $D_a^{-1} f(t) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $D_a^{-1} f$,

$$p \int_a^x (x-t)^{p-1} D_a^{-1} f(t) dt = p! D_a^{-p} (D_a^{-1} f)(x) = p! D_a^{-p-1} f(x)$$

Ainsi,

$$D_a^{-p-1} f(x) = \frac{1}{p!} \int_a^x (x-t)^p f(t) dt$$

□

Généralisons.

Définition 1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $x > a$. Soit $f \in \mathcal{I}_a$. L'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre p de f est la fonction définie sur $[a, +\infty[$ par

$$D_a^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt$$

Exemple. Prenons $f(x) = 1$. On a

$$\Gamma(\alpha) D_a^{-\alpha} f(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt = -\frac{1}{\alpha} [(x-t)^\alpha]_a^x = \frac{1}{\alpha} (x-a)^\alpha$$

Ainsi,

$$D_a^{-\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Proposition 3. Pour tous $p, q \in \mathbb{R}_+^*$,

$$D_a^{-p-q} = D_a^{-p} \circ D_a^{-q}$$

Cette propriété nous montre que l'exposant de D_a^{-p} se comporte réellement comme une puissance.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_a$. Soit $x \geq a$. On a

$$\begin{aligned} (D_a^{-p} \circ D_a^{-q})f(x) &= D_a^{-p}(D_a^{-q}f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^p D_a^{-q}f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^x (x-t)^{p-1} \int_a^t (t-u)^{q-1} f(u) du dt \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini,

$$(D_a^{-p} \circ D_a^{-q})f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{p-1} (t-u)^{q-1} dt du$$

Dans l'intégrale en t , posons $t = (1-s)u + sx$. Il vient

$$\int_u^x (x-t)^{p-1} (t-u)^{q-1} dt = (x-u)^{p+q-1} \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^{q-1} ds = (x-u)^{p+q-1} B(p, q)$$

où B est la fonction β . On a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

De là,

$$(D_a^{-p} \circ D_a^{-q})f(x) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^x (x-u)^{p+q-1} f(u) du = D_a^{-p-q}f(x)$$

Ceci étant vrai pour tout f et pour tout x , on a le résultat. $\square$

Exemple. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Prenons $f(x) = e^{\lambda x}$. On a

$$\Gamma(\alpha) J^\alpha f(x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{\lambda(x-t)} dt = e^{\lambda x} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$$

Développons $e^{\lambda t}$ en série.

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \int_0^x t^{\alpha+k-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k x^{\alpha+k}}{k!(\alpha+k)} \\ &= x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda x)^k}{k!(\alpha+k)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda x)^k}{k!(\alpha+k)}$$