

Les dérivées de la fonction arc tangente

Marc Lorenzi

4 février 2025

1 Introduction

On se donne un réel $a > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan \frac{x}{a}$$

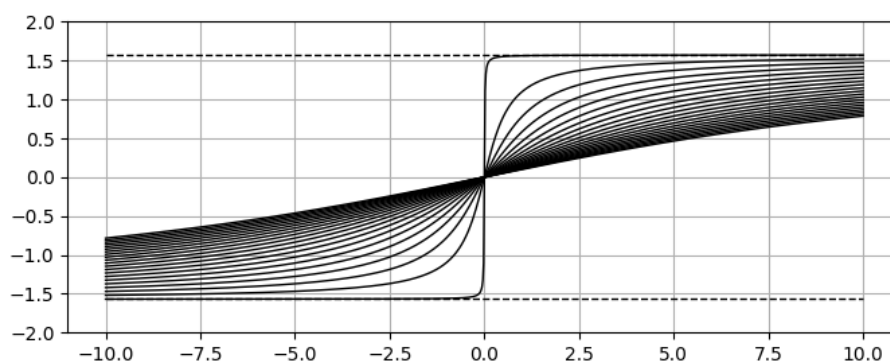


FIGURE 1 – La fonction f pour quelques valeurs de a

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Bien que cette fonction soit en apparence très « calme », ses dérivées successives prennent de très grandes valeurs et présentent de nombreuses oscillations. La figure ci-dessous représente la courbe de $f^{(10)}$. En noir, les racines de la fonction. En rouge, les extrema. La décroissance rapide de $f^{(10)}$ à l'infini ne permet pas de voir les oscillations de la fonction au voisinage des extrema les plus écartés de 0.

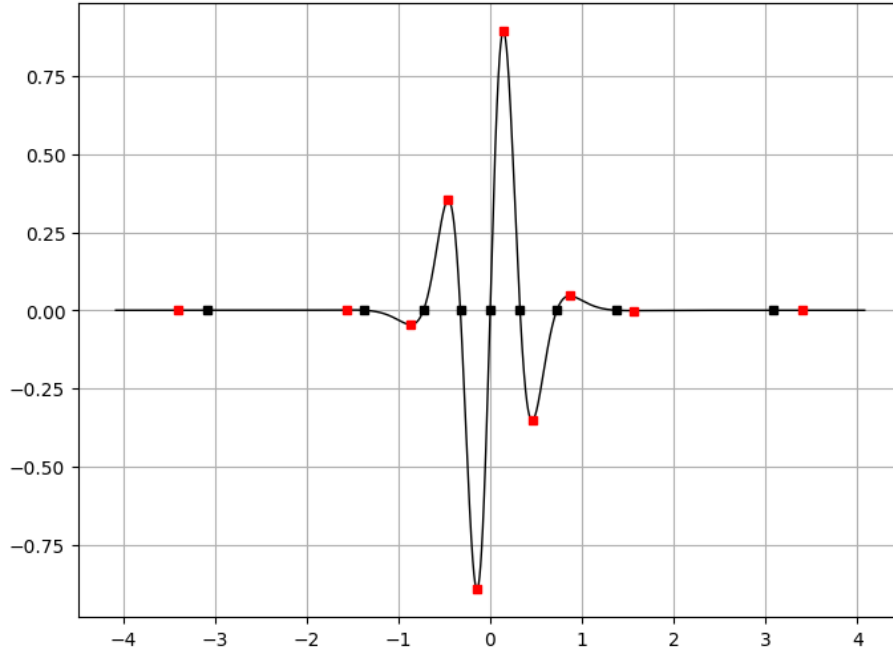


FIGURE 2 – La dérivée 10^e de f avec ses 9 racines et ses 10 extrema

2 Le calcul des dérivées de f

2.1 Une première valeur de $f^{(n)}$

Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i} ((x-ia)^{-n} - (x+ia)^{-n})$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur n . Tout d'abord, une décomposition en éléments simples montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i} ((x-ia)^{-n} - (x+ia)^{-n})$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i} (-n(x-ia)^{-n-1} - (-n)(x+ia)^{-n-1}) \\ &= (-1)^n \frac{n!}{2i} ((x-ia)^{-n-1} - (x+ia)^{-n-1}) \end{aligned}$$

ce qui est la valeur souhaitée. $\square$

2.2 Changement de variable

La fonction $\theta \mapsto a \cotan \theta$ est une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. Tout réel x s'écrit donc de façon unique $x = a \cotan \theta$ où $\theta \in]0, \pi[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_n(\theta) = \sin^n \theta \sin n\theta$$

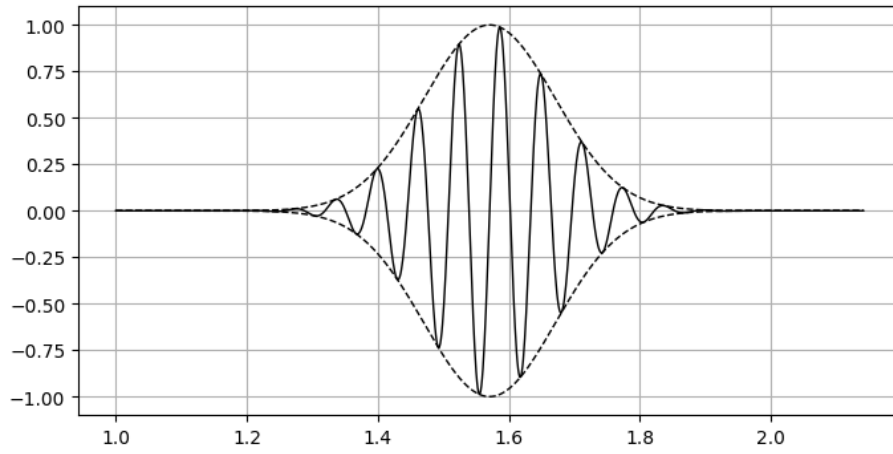


FIGURE 3 – La fonction φ_{100}

Proposition 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en posant $x = a \cotan \theta$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \varphi_n(\theta)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2ia^n} ((\cotan \theta - i)^{-n} - (\cotan \theta + i)^{-n}) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! \sin^n \theta}{2ia^n} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \sin^n \theta \sin n\theta \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \varphi_n(\theta) \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Les racines de $f^{(n)}$

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de $f^{(n)}$ sont les réels

$$a \cotan \frac{k\pi}{n} \quad k = 1 \dots n-1$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f^{(n)}(x) = 0$ si et seulement si $\varphi_n(\theta) = 0$, c'est à dire, puisque $\theta \in]0, \pi[$, $\sin n\theta = 0$ ou encore $\theta = k\pi/n$ où $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
□

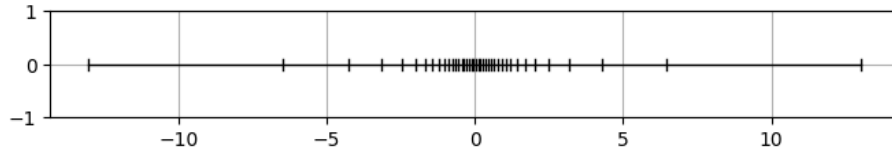


FIGURE 4 – Les 40 racines de $f^{(41)}$

3 La norme de $f^{(n)}$

Nous allons déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f^{(n)}\| = \sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

3.1 Le maximum de $|f^{(n)}|$

Comme $|\varphi_n| \leq 1$, on a

$$\|f^{(n)}\| \leq \frac{(n-1)!}{a^n}$$

La fonction $f^{(n)}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. La borne supérieure ci-dessus est donc un maximum, et ce maximum est atteint en un extremum local de $f^{(n)}$, c'est à dire une racine de $f^{(n+1)}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n}$$

Nous avons déjà les racines de $f^{(n+1)}$. Ce sont les réels

$$a \cotan \theta_{n+1,k} \quad k = 1 \dots n$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta_{n+1,k}) &= \sin^n \frac{k\pi}{n+1} \sin \frac{nk\pi}{n+1} \\ &= \sin^n \frac{k\pi}{n+1} \sin \left(k\pi - \frac{k\pi}{n+1} \right) \\ &= (-1)^k \sin^{n+1} \frac{k\pi}{n+1}\end{aligned}$$

Le cas où n est impair est facile. La figure ci-dessous représente la courbe de φ_{21} ainsi que les 21 extrema locaux de cette fonction.

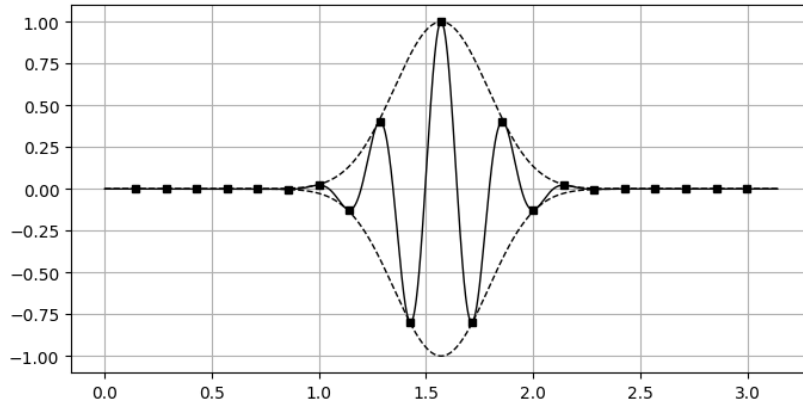


FIGURE 5 – $|\varphi_{21}(\theta_{22,k})|$

Proposition 4. *Pour tout n impair,*

$$\|f^{(n)}\| = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Posons $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\varphi_n(\theta_{n+1,p+1}) = (-1)^p \sin^{n+1} \frac{(p+1)\pi}{2p+2} = (-1)^p$$

d'où le résultat. $\square$

Voici maintenant la courbe de φ_{20} avec ses 20 extrema locaux. On voit que, cette fois ci, la valeur 1 n'est pas atteinte.

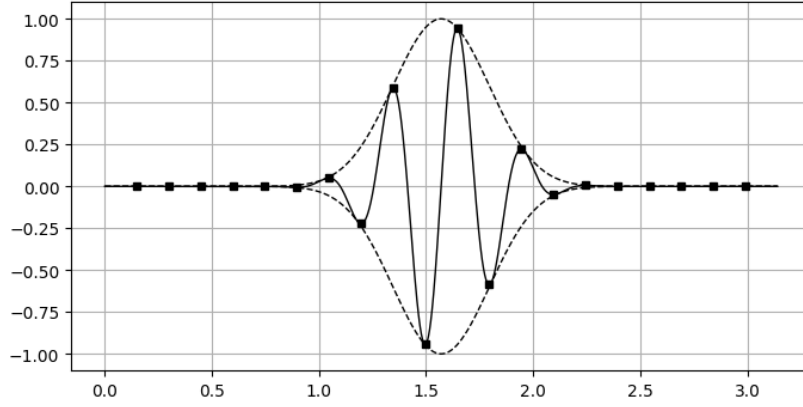


FIGURE 6 – $|\varphi_{20}(\theta_{21,k})|$

Proposition 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair,*

$$\|f^{(n)}\| = \frac{(n-1)!}{a^n} \cos^{n+1} \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair. Posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $k\pi/(n+1) \in [0, \pi/2]$. Sur cet intervalle, la fonction sinus est croissante. On a donc pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\sin^{n+1} \theta_{n+1,k} \leq \sin^{n+1} \theta_{n+1,p}$$

La relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ montre que pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on a encore cette inégalité. Il reste à calculer $|\varphi_n(\theta_{n+1,p})|$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\theta_{n+1,p})| &= \sin^{n+1} \frac{p\pi}{n+1} \\ &= \sin^{n+1} \frac{n\pi}{2(n+1)} \\ &= \sin^{n+1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \\ &= \cos^{n+1} \frac{\pi}{2(n+1)} \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

3.2 Développement asymptotique

Lorsque n tend vers l'infini, le réel $\cos(\pi/2(n+1))$ tend vers 1 et donc

$$\|f^{(n)}\| \sim \frac{(n-1)!}{a^n}$$

Allons un peu plus loin. Lorsque n est pair,

$$\begin{aligned}
\|f^{(n)}\| &= \frac{(n-1)!}{a^n} \cos^{n+1} \frac{\pi}{2(n+1)} \\
&= \frac{(n-1)!}{a^n} \left(1 - \frac{\pi^2}{8(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n+2} \\
&= \frac{(n-1)!}{a^n} \exp\left((n+1) \ln\left(1 - \frac{\pi^2}{8(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{a^n} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{a^n} \left(1 - \frac{\pi^2}{8(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{a^n} \left(1 - \frac{\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{(n-1)!}{a^n} - \|f^{(n)}\| \sim \frac{\pi^2(n-1)!}{8na^n}$$

L'utilisation de la formule de Stirling donne enfin l'équivalent

$$\frac{(n-1)!}{a^n} - \|f^{(n)}\| \sim \frac{\sqrt{2}\pi^{5/2}n^{n-3/2}}{8e^n a^n}$$