

Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Marc Lorenzi

17 novembre 2024

Résumé

On étudie dans cet article une fonction qui est discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On montre que cette fonction est intégrable sur $[0, 1]$ et que son intégrale est nulle.

1 Introduction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme suit.

- Si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$.
- Si $x \in \mathbb{Q}$, écrivons $x = p/q$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Posons

$$f(x) = \frac{1}{q}$$

La fonction f est la *fonction de Thomae*. Elle est 1-périodique. Voici sa « courbe » sur l'intervalle $[0, 2]$.

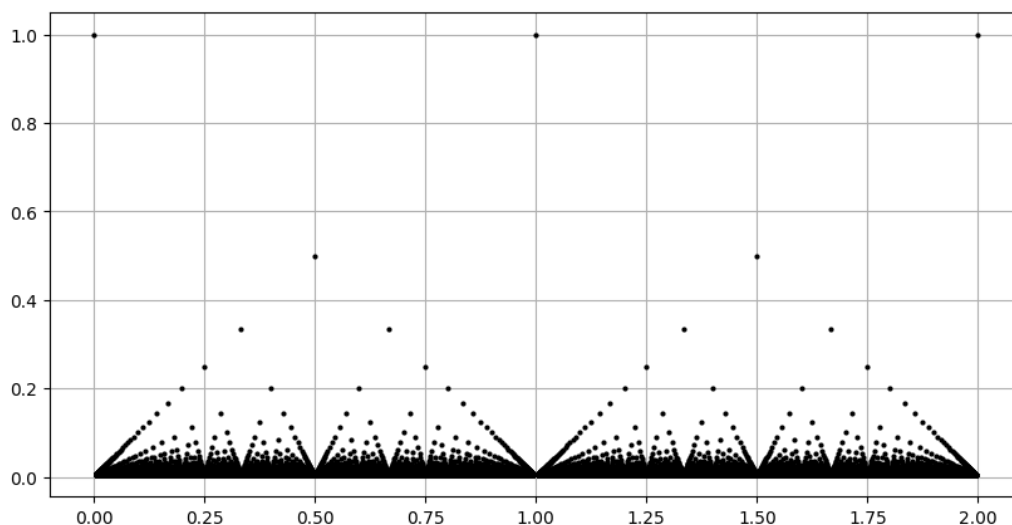


FIGURE 1 – La fonction de Thomae

Dorénavant, quand nous dirons « le rationnel $\frac{p}{q}$ », nous supposons implicitement que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

2 Les rationnels

Proposition 1. *f est discontinue en tout rationnel.*

Démonstration. Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon = q/2$. Soit $\alpha > 0$. Par la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|y - x| \leq \alpha$. On a alors

$$|f(y) - f(x)| = \left| 0 - \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{q} > \varepsilon$$

Ainsi, f n'est pas continue en x . $\square$

Remarque. On peut aussi montrer ce résultat en utilisant la caractérisation séquentielle des limites. Par la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'irrationnels qui tend vers x . Cependant,

$$f(y_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \neq f(x)$$

3 Les irrationnels

Proposition 2. *f est continue en tout irrationnel.*

Démonstration. Soit $x \notin \mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$0 < \frac{1}{Q} \leq \varepsilon$$

Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : q \in \llbracket 1, Q \rrbracket, |r - x| \leq 1 \right\}$$

J'affirme que A est un ensemble fini. En effet, pour tout entier $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$, $\frac{p}{q} \in A$ si et seulement si

$$x - 1 \leq \frac{p}{q} \leq x + 1$$

ou encore

$$-q(x - 1) \leq p \leq q(x + 1)$$

et il y a un nombre fini d'entiers naturels p vérifiant cette double inégalité. Écrivons donc

$$A = \{r_1, \dots, r_N\}$$

où N est le cardinal de A .

Soit

$$\alpha = \frac{1}{2} \min(1, |x - r_1|, \dots, |x - r_N|)$$

Remarquons que, comme x est irrationnel, aucun des r_i n'est égal à x et donc $\alpha > 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - x| \leq \alpha$.

- Si $y \notin \mathbb{Q}$, alors

$$|f(y) - f(x)| = |0 - 0| = 0 \leq \varepsilon$$

- Si $y = p/q \in \mathbb{Q}$, y n'est pas l'un des r_i , donc $y \notin A$. Cependant, $|y - x| \leq 1$, donc $q > Q$. En conséquence,

$$|f(y) - f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{Q} \leq \varepsilon$$

□

4 Intégrabilité

Une fonction bornée $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est continue presque partout pour la mesure de Lebesgue. C'est le cas de f , car la mesure de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ est 0. De plus, on ne change pas la valeur de l'intégrale si on modifie la fonction sur un ensemble de mesure nulle. Comme f est nulle presque partout, on a donc $\int_0^1 f = 0$. *Nous allons démontrer ce résultat de façon élémentaire.* Bien entendu, le fait qu'une preuve soit élémentaire ne veut pas dire que cette preuve est facile ...

Proposition 3. *f est intégrable sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f = 0$.*

Pour tout entier $Q \geq 1$, notons

$$A_Q = \left\{ \frac{p}{q} \in]0, 1[, q \leq Q \right\}$$

Lemme 4. *La distance entre deux points distincts de A_Q est supérieure ou égale à $\frac{1}{Q^2}$. L'ensemble A_Q est fini, de cardinal inférieur ou égal à Q^2 .*

Démonstration. Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ deux éléments distincts de A_Q . On a

$$\left| \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{p'q - pq'}{qq'} \right| \geq \frac{1}{Q^2}$$

Soient $0 < x_1 < \dots < x_N < 1$ N points de A_Q . On a

$$1 > x_N - x_1 = (x_N - x_{N-1}) + \dots + (x_2 - x_1) \geq \frac{N-1}{Q^2}$$

Ainsi, $N-1 < Q^2$ et donc $N \leq Q^2$. L'ensemble A_Q possède au plus Q^2 éléments. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver la proposition.

Démonstration. Soit $Q \geq 2$. Créons des segments centrés en les éléments de A_Q , et de longueur $\frac{1}{Q^\alpha}$ où $\alpha > 2$. Ces segments sont disjoints car $\frac{1}{Q^\alpha} < \frac{1}{Q^2}$. Appelons-les des segments *anormaux*. Par le lemme précédent, il y a au plus Q^2 segments spéciaux. Le complémentaire de la réunion des segments anormaux est une réunion d'intervalles que nous appellerons *normaux*. Mis ensembles, tous ces intervalles (anormaux et normaux) définissent une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[0, 1]$. Remarquons que tout segment anormal est suivi d'un segment normal, et vice versa.

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit.

- À l'intérieur de chaque segment anormal, φ est constante égale à 1.
- À l'intérieur d'un segment normal, φ est constante égale à $\frac{1}{Q}$.
- Aux points de la subdivision σ , φ prend la valeur 1.

Voici le graphe de φ pour $Q = 8$ et $\alpha = 2.01$.

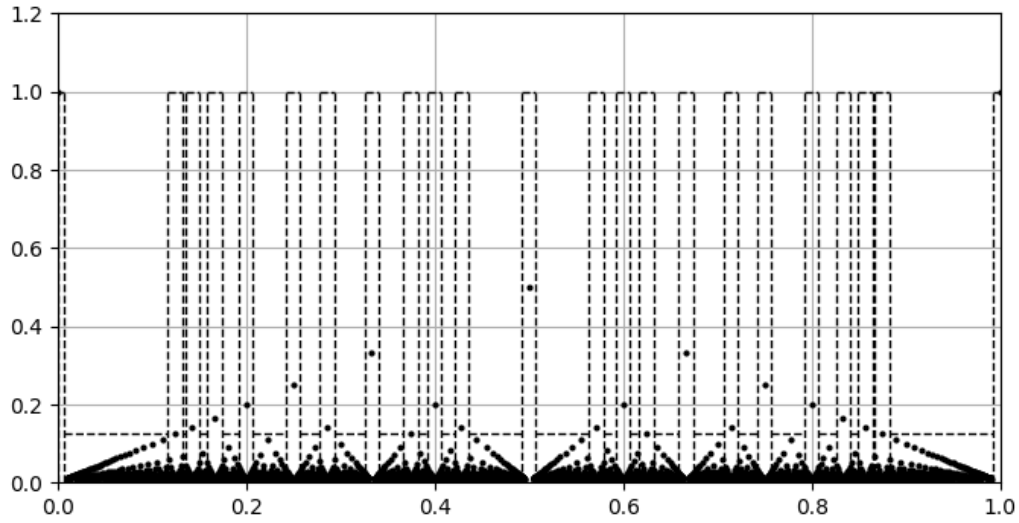


FIGURE 2 – La fonction φ

La fonction φ est en escalier, et $f \leq \varphi$. De plus,

- Pour un segment spécial $[x_k, x_{k+1}]$, on a

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{Q^\alpha}$$

- Pour un segment normal $[x_k, x_{k+1}]$, on a

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi = \frac{1}{Q}(x_{k+1} - x_k)$$

De là, en notant $\ell(S)$ la longueur d'un segment S , on a par la formule de Chasles

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi &= \sum_{S \text{ anormal}} \int_S \varphi + \sum_{S \text{ normal}} \int_S \varphi \\
&= \sum_{S \text{ anormal}} \frac{1}{Q^\alpha} + \frac{1}{Q} \sum_{S \text{ normal}} \ell(S) \\
&\leq Q^2 \frac{1}{Q^\alpha} + \frac{1}{Q} \\
&\leq \frac{1}{Q^{\alpha-2}} + \frac{1}{Q}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $Q \geq 2$ tel que $\frac{1}{Q^{\alpha-2}} + \frac{1}{Q} \leq \varepsilon$. Un tel Q existe car $\frac{1}{Q^{\alpha-2}} + \frac{1}{Q}$ tend vers 0 lorsque Q tend vers l'infini. La fonction $\psi = 0$ est en escalier et minore f , et la fonction φ que nous venons de décrire est en escalier et majore f . De plus,

$$\int_0^1 (\varphi - \psi) = \int_0^1 \varphi \leq \frac{2}{Q} \leq \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ψ, φ en escalier sur $[0, 1]$ telles que $\psi \leq f \leq \varphi$ et $\int_0^1 (\varphi - \psi) \leq \varepsilon$. Ainsi, la fonction f est intégrable sur $[0, 1]$. De plus,

$$0 = \int_0^1 \psi \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 \varphi \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte

$$\int_0^1 f = 0$$

□