

Le réel e est irrationnel

Marc Lorenzi

12 août 2026

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Lemme 1. *Pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . On a $1! = 1 = 2^{1-1}$. Soit $n \geq 1$. Supposons $n! \geq 2^{n-1}$. On a alors

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

□

Proposition 2. *La suite u est convergente.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

La suite u est donc croissante. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite u est croissante et majorée (par 3), donc convergente. $\square$

Notons e la limite de u . Nous pouvons à ce stade dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e \leq 3$. En prenant $n = 2$, on obtient ainsi l'encadrement $5/2 \leq e \leq 3$.

Proposition 3. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$e - u_n \leq \frac{1}{n!n}$$

Démonstration. Soient $1 \leq n < p$. On a

$$u_p - u_n = \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^p \frac{n!}{k!}$$

Remarquons que pour tout $k \geq n+1$,

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots k} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^p \frac{n!}{k!} &\leq \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{p-n-1} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{p-n}}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a donc

$$u_p - u_n \leq \frac{1}{n!n}$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient l'inégalité voulue. $\square$

Proposition 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < e - u_n$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n < u_{n+1} \leq e$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 5. *e est irrationnel.*

Démonstration. Supposons que $e = p/q$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $n \geq 1$,

$$0 < e - u_n \leq \frac{1}{n!n}$$

Remarquons que $u_n = A_n/n!$, où $A_n \in \mathbb{N}^*$. L'encadrement ci-dessus s'écrit donc

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{A_n}{n!} \leq \frac{1}{n!n}$$

d'où, en multipliant par $qn!$,

$$0 < pn! - qA_n \leq \frac{q}{n}$$

Prenons $n = q + 1$. Il vient

$$0 < p(q+1)! - qA_{q+1} \leq \frac{q}{q+1} < 1$$

Contradiction, puisque $p(q+1)! - qA_{q+1}$ est un entier. $\square$