

Les $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$

Marc Lorenzi

7 mars 2025

Résumé

Les endomorphismes du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont bien connus : ce sont les homothéties. On s'intéresse dans cet article aux endomorphismes du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. Outre les homothéties, il existe des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ discontinus en tout point. Leur graphe est dense dans le plan.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Description des $\mathbb{Q}$-endomorphismes de $\mathbb{R}$	2
2.1	Introduction	2
2.2	Continuité	3
2.3	Existence d'endomorphismes de type 2	4
3	Le graphe des endomorphismes de type 2	5

1 Introduction

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de façon évidente d'une structure de $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Un résultat très général affirme que si E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ infini, alors

$$\text{card } E = \max(\dim_{\mathbb{K}} E, \text{card } \mathbb{K})$$

En prenant $E = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on obtient

$$\text{card } \mathbb{R} = \max(\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \text{card } \mathbb{Q})$$

et celui de $\mathbb{Q}$ est

$$\text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$$

et celui de $\mathbb{R}$ est

$$\text{card } \mathbb{R} = 2^{\aleph_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{c}$$

On a donc

$$\mathfrak{c} = \max(\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \aleph_0)$$

Par le théorème de Cantor, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ et donc

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

Le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ est donc de dimension infinie non dénombrable. Notons au passage que le *cardinal* de $\mathbb{R}$ est égal à sa *dimension* :

$$\text{card } \mathbb{R} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

2 Description des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$

2.1 Introduction

Définition 1. Un $\mathbb{Q}$ -endomorphisme de $\mathbb{R}$ est une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exercice. Montrer que la première condition entraîne la deuxième. Les $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont donc les endomorphismes du *groupe* $(\mathbb{R}, +)$.

Notons $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des éléments de cet ensemble ? Nous avons bien évidemment les applications de la forme $x \longmapsto \mu x$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Ces applications sont continues sur $\mathbb{R}$, ce sont en fait les $\mathbb{R}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$, autrement dit les homothéties. Mais existe-t-il des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes discontinus ?

2.2 Continuité

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continu en x . Alors, $f(x) = xf(1)$.

Démonstration. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que x_n tend vers x lorsque n tend vers l'infini. La fonction f est continue en x donc, par caractérisation séquentielle, $f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1)$, donc $f(x_n)$ tend aussi vers $xf(1)$. Par unicité de la limite, $f(x) = xf(1)$. $\square$

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. On suppose que f est continu en au moins un point. Alors, f est continu sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que f est continu en $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers y . Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui tend vers $x - y$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(y_n + q_n) = f(y_n) + f(q_n) = f(y_n) + q_n f(1)$$

Lorsque n tend vers l'infini, $y_n + q_n$ tend vers $y + (x - y) = x$. Comme f est continu en x , $f(y_n + q_n)$ tend vers $f(x) = xf(1)$. De plus, $q_n f(1)$ tend vers $(x - y)f(1)$. Ainsi, $f(y_n)$ tend vers

$$xf(1) - (x - y)f(1) = yf(1)$$

Ceci est vrai pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels qui tend vers y . Par caractérisation séquentielle, f a une limite en y (et cette limite est $yf(1)$). Ainsi, f est continue en y . $\square$

Proposition 3. Les $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont de deux types :

- Type 1 : les multiples de $\text{id}_{\mathbb{R}}$.
- Type 2 : les $\mathbb{Q}$ -endomorphismes discontinus en tout point.

Démonstration. Soit f un $\mathbb{Q}$ -endomorphisme de $\mathbb{R}$. Supposons que f n'est pas de type 2. L'endomorphisme f est donc continu en au moins un point. Par la proposition 2, f est continu sur $\mathbb{R}$. Par la proposition 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Ainsi, en posant $\mu = f(1)$, $f = \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$ et donc f est de type 1. $\square$

Nous noterons

- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ de type 1.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ de type 2.

On a donc la partition

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$$

2.3 Existence d'endomorphismes de type 2

Une question se pose : existe-t-il des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ de type 2 ? La réponse est oui.

Proposition 4. $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Nous allons donner deux démonstrations de cette proposition. Voici tout d'abord une preuve « à la Cantor ¹ ».

Démonstration. L'application $\mu \mapsto \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$. On a donc

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) = \text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$$

Soit $\mathcal{B}$ une $\mathbb{Q}$ -base de $\mathbb{R}$. Un endomorphisme de $\mathbb{R}$ est caractérisé par la donnée des images des éléments de $\mathcal{B}$, c'est à dire par une application de $\mathcal{B}$ vers $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \text{card } \mathbb{R}^{\mathcal{B}} = (\text{card } \mathbb{R})^{\text{card } \mathcal{B}} = \mathfrak{c}^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = \text{card } \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) < \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$$

Il existe donc des $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de type 2. On peut même dire mieux. Rappelons la partition

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) &= \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}) + \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) \\ &= \max(\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R}), \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

ou encore

$$2^{\mathfrak{c}} = \max(\mathfrak{c}, \text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}))$$

Par le théorème de Cantor, $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$, donc

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}} \neq 0$$

□

Il y a donc *énormément* de $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de type 2, en fait autant que de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!

Remarque. Le théorème dont nous avons parlé dans l'introduction nous dit que

$$\text{card } \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \max(\dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), \text{card } \mathbb{Q}) = \max(\dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}), \aleph_0) = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$$

Exercice. Vérifier les cardinaux et les dimensions des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels du tableau ci-dessous. Pourquoi y a-t-il un tiret pour la « dimension de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$ » ?

Espace	Cardinal	Dimension
$\mathbb{Q}$	$\aleph_0$	1
$\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^1(\mathbb{R})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$	—
$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$	$2^{\mathfrak{c}}$

1. Pour montrer qu'un ensemble n'est pas vide, on montre que son cardinal est non nul. Cantor a prouvé de cette manière l'existence de nombres transcendants.

Le carré de la fin de preuve est mal placé. L'environnement demo n'est pas très solide.

Donnons maintenant une preuve plus « constructive » de la proposition 4. Enfin, aussi constructive que faire se peut, parce qu'il est impossible de donner explicitement un seul $\mathbb{Q}$ -endomorphisme de $\mathbb{R}$ de type 2 : la construction ci-dessous va faire appel à une base du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ et il s'avère que l'existence d'une telle base résulte de l'axiome du choix. En fait, l'axiome du choix est équivalent à « tous les espaces vectoriels possèdent une base ».

Démonstration. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$a + b\sqrt{2} = 0$$

En supposant un court instant que $b \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = -a/b \in \mathbb{Q}$, contradiction. Ainsi, $b = 0$ puis, en reportant, $a = 0$. La famille $\mathcal{F} = (1, \sqrt{2})$ est donc une famille $\mathbb{Q}$ -libre de $\mathbb{R}$. Complétons $\mathcal{F}$ en une $\mathbb{Q}$ -base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$. Soit f le $\mathbb{Q}$ -endomorphisme de $\mathbb{R}$ défini par $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -1$ et pour tout $e \in \mathcal{B}$ différent de 1 et $\sqrt{2}$, $f(e) = 0$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu \text{id}_{\mathbb{R}}$. On a donc $f(1) = \mu \times 1 = \mu$, d'où $\mu = 1$. Mais aussi,

$$-1 = f(\sqrt{2}) = \mu\sqrt{2}$$

donc $\mu = -1/\sqrt{2}$. Contradiction. Ainsi, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}^2(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque. On aurait pu bien entendu prendre pour $f(1)$ et $f(\sqrt{2})$ d'autres valeurs que 1 et -1 . La seule condition à respecter est $f(\sqrt{2}) \neq f(1)\sqrt{2}$.

Exercice.

1. Montrer que $\text{Im} f = \mathbb{Q}$.
2. Que vaut $\ker f$?
3. Montrer que $\ker f$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Trouver les réels x non nuls et les rationnels λ tels que $f(x) = \lambda x$.

3 Le graphe des endomorphismes de type 2

Il s'avère que les $\mathbb{Q}$ -endomorphismes de $\mathbb{R}$ de type 2 sont *très très* irréguliers. La figure ci-dessous montre cinquante mille points du graphe de deux tels endomorphismes. On n'a tracé que des points appartenant au carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. On a repris l'idée de la proposition 4 : dans le graphe de gauche, $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = -1$. Dans celui de droite, $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 2$. En réalité les valeurs importent peu (voir remarque plus haut). Bien malin qui pourrait distinguer ces deux graphes.

Obligé d'insérer un saut de page. Sinon, la figure est mal placée

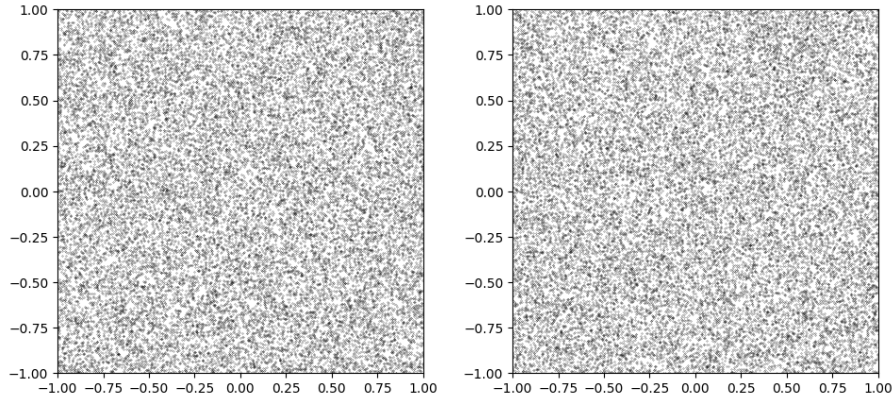


FIGURE 1 – Les graphes de deux fonctions de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Exercice. Écrire du code Python qui trace ce genre de graphe.

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le graphe de f est

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

Comme f est de type 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) \neq \alpha f(1)$. Posons

$$k = \alpha f(1) - f(\alpha)$$

Montrons que tout point de $\mathbb{R}^2$ est la limite d'une suite de points de Γ . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de rationnels telles que

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(xf(1) - y)$$

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(y\alpha - xf(\alpha))$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = a_n\alpha + b_n \quad \text{et} \quad y_n = f(x_n) = a_nf(\alpha) + b_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$ donc $(x_n, y_n) \in \Gamma$. Par les opérations sur les limites, on a facilement

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$$

Ainsi, (x_n, y_n) tend vers (x, y) lorsque n tend vers l'infini. $\square$