

Une équation fonctionnelle

1 Introduction

On considère l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = g(x)$$

d'inconnue $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Proposition 1. Soit $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit Γ le graphe de la fonction g . Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'homothétie de centre O et de rapport 2. La fonction g est solution de (E) si et seulement si $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.

Démonstration.

$(\Rightarrow)$ Supposons que g est solution de (E) .

$(\subset)$ Soit $(x, y) \in \Gamma$.

$$\varphi(x, y) = (2x, 2y) = (2x, 2g(x)) = (2x, g(2x)) \in \Gamma$$

Ainsi, $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma$.

$(\supset)$ Inversement, soit $z \in \Gamma$. Il existe donc $(x, y) \in \Gamma$ tel que $z = \varphi(x, y)$. Ainsi,

$$z = (x, y) = (x, g(x)) = \left(2\frac{x}{2}, 2g\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}, g\left(\frac{x}{2}\right)\right) \in g(\Gamma)$$

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x, g(x)) \in \Gamma$ et donc $(2x, 2g(x))$ aussi. Cependant, $(2x, g(2x)) \in \Gamma$. On en déduit que $g(2x) = 2g(x)$ (unicité de l'image du réel x par l'application). $\square$

Remarquons que Γ est stable par toutes les homothéties φ^n , $n \in \mathbb{Z}$, c'est à dire les homothéties de centre O et de rapport 2^n , $n \in \mathbb{Z}$. *En clair, faire des zooms sur le graphe d'une solution de (E) n'a aucun intérêt, puisqu'on retrouve après le zoom exactement le même graphe qu'avant.*

2 Le cas dérivable

Proposition 2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0. On a équivalence entre

- $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
- $\exists a \in \mathbb{R}, g = a \text{ id}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Le second point implique clairement le premier. Supposons le premier point réalisé. En remplaçant x par 0 dans l'égalité, on voit que $g(0) = 0$.

Soit $x \neq 0$. On a $g(x) = 2g\left(\frac{x}{2}\right)$ et, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(x) = 2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}$$

On reconnaît là des taux d'accroissements qui tendent, lorsque n tend vers l'infini, vers $g'(0)$. En posant $a = g'(0)$, on obtient par passage à la limite sur n que $g(x) = ax$. Cette égalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$, on conclut que $g = a \text{ id}_{\mathbb{R}}$. $\square$

3 Le cas continu - un exemple

Question. Existe-t-il une fonction g continue en 0 vérifiant (E) et qui n'est pas un multiple de l'identité? Une telle fonction serait donc non dérivable en 0.

La réponse à la question est oui, il suffit de prendre $x \mapsto |x|$. C'était trop facile, alors compliquons un peu en rajoutant une condition : imposons à g d'être croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui élimine la fonction « valeur absolue ».

Introduisons la constante magique

$$C = 1 + \frac{2\pi}{\ln 2}$$

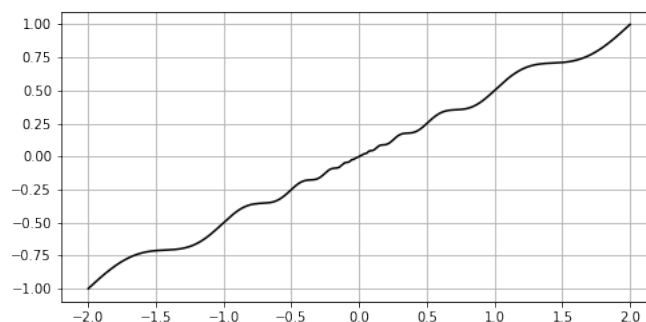
Soient $a, b > 0$ tels que $a \geq Cb$.

Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \neq 0$ par

$$h(x) = a + b \sin(2\pi \lg |x|)$$

où $\lg$ désigne le logarithme en base 2.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xh(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Voici le graphe de g avec $Cb = a = \frac{1}{2}$.



- Pour tout $x \neq 0$, on a $h(2x) = h(x)$, et donc $g(2x) = 2g(x)$. Comme cette dernière égalité est vraie aussi pour $x = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$$

- $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ par les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Pour tout $x \neq 0$,

$$|g(x)| \leq (a+b)|x|$$

et donc, par le théorème des gendarmes, $g(x) \rightarrow 0 = g(0)$ lorsque x tend vers 0. g est donc continue en 0.

- Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= xh'(x) + h(x) \\ &= \frac{2\pi b}{\ln 2} \cos(2\pi \lg |x|) + a + b \sin(2\pi \lg |x|) \\ &\geq -\frac{2\pi b}{\ln 2} + a - b \\ &= a - Cb \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$.
- g est continue en 0.
- g est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
- g n'est pas un multiple de l'identité de $\mathbb{R}$.

4 Le cas continu - solution

Nous allons déterminer les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ solutions de (E).

Soit g une telle fonction.

Commençons par regarder ce qui se passe sur $\mathbb{R}_+$. Posons, pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$,

$$g(2x) = 2xh(2x) = 2g(x) = 2xh(x)$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $h(2x) = h(x)$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = h(2^t)$ (et donc, pour tout $x > 0$, $h(x) = \varphi(\lg x)$). La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t+1) = h(2^{t+1}) = h(2 \times 2^t) = h(2^t) = \varphi(t)$$

Ainsi, φ est périodique de période 1. Résumons nous : si g est continue sur $\mathbb{R}$ et solution de (E), il existe une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, telle que pour tout $x > 0$,

$$g(x) = x\varphi(\lg x)$$

Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}_-$? Posons, pour tout $x < 0$, $k(x) = \frac{g(x)}{x}$. La fonction k est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et on a pour tout $x < 0$,

$$g(2x) = 2xk(2x) = 2g(x) = 2xk(x)$$

Ainsi, pour tout $x < 0$, $k(2x) = k(x)$. Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = k(-2^t)$ (et donc, pour tout $x < 0$, $k(x) = \psi(\lg(-x))$). La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t+1) = k(-2^{t+1}) = h(2 \times (-2^t)) = k(-2^t) = \psi(t)$$

Ainsi, ψ est périodique de période 1. Résumons nous : si g est continue sur $\mathbb{R}$ et solution de (E), il existe une fonction ψ continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, telle que pour tout $x < 0$,

$$g(x) = x\psi(\lg(-x))$$

Examinons la réciproque. Soient $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, périodiques, de période 1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

- $\forall x < 0, g(x) = x\psi(\lg(-x))$.
- $g(0) = 0$.
- $\forall x > 0, g(x) = x\varphi(\lg x)$.

Il est clair que g vérifie (E) et est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à prouver que g est continue en 0. La fonction $|\varphi|$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle y est donc bornée par un réel M . Comme elle est de période 1, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. On a donc pour tout réel $x > 0$,

$$|g(x)| = x|\varphi(\lg x)| \leq Mx$$

et ainsi, $g(x)$ tend vers $0 = g(0)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Ainsi, g est continue à droite en 0. Le même raisonnement prouve que g est continue à gauche en 0. Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Nous avons finalement montré le résultat ci-dessous.

Proposition 3. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. La fonction g est solution de (E) si et seulement si il existe $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$, périodiques, de période 1, telles que

- $\forall x < 0, g(x) = x\psi(\lg(-x))$.
- $g(0) = 0$.
- $\forall x > 0, g(x) = x\varphi(\lg x)$.

Il reste un peu de place sur la page, alors voici pour terminer un exemple au hasard. On a pris $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \sin(40\pi x)$.

