

Le théorème de Fejér

Marc Lorenzi

18 octobre 2023

Résumé

Nous allons dans cet article montrer que si f est une fonction continue et périodique, les sommes de Fourier associées à f convergent uniformément vers f au sens de Cesaro.

1 Introduction

1.1 Coefficients de Fourier

Soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^e coefficient de Fourier de f est

$$\hat{f}_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

1.2 Le lemme de Riemann-Lebesgue

Proposition 1. Soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable. Alors,

$$\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est la fonction indicatrice d'un intervalle $I = [a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &= \left| \int_a^b e^{-int} dt \right| \\ &= \left| -\frac{1}{in} (e^{inb} - e^{ina}) \right| \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Cette quantité tend bien vers 0. Le résultat reste valable si I est ouvert en a ou en b . Par linéarité, il reste vrai pour toute combinaison de telles fonctions, c'est à dire pour toute fonction en escalier.

Supposons maintenant que $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier g et h telles que $g \leq f \leq h$ et

$$\int_{-\pi}^{\pi} (h(x) - g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t)) e^{-int} dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (h(t) - g(t)) dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \end{aligned}$$

Comme g est en escalier, l'intégrale du membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ cette intégrale soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$|\widehat{f}_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où le résultat.

Supposons enfin que $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. La partie réelle et la partie imaginaire de f sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc acquis pour ces deux fonctions. Par linéarité, c'est encore vrai pour f . $\square$

2 Le noyau de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

Remarquons que

$$D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx$$

et donc $D_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction D_n est le *noyau de Dirichlet*.

Proposition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- D_n est pair et 2π -périodique.
- $D_n(0) = 2n + 1$.

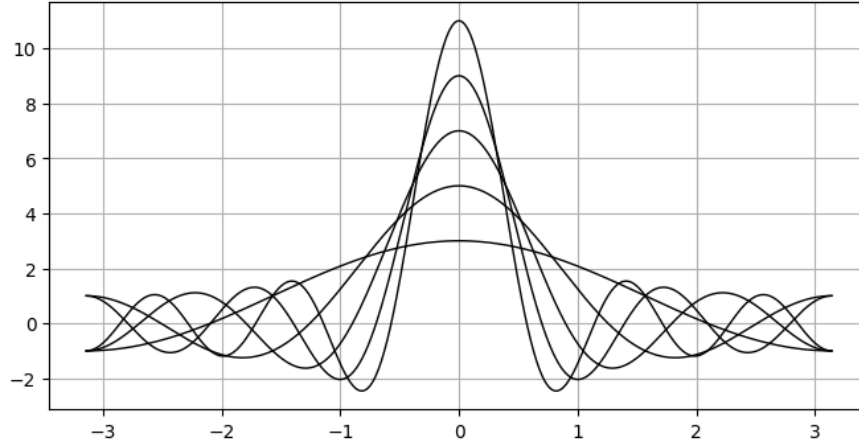


FIGURE 1 – Le noyau de Dirichlet D_n pour $1 \leq n \leq 5$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|D_n(x)| \leq 2n + 1$.

•

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$$

Démonstration. Vérifications immédiates. $\square$

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{2i \sin x/2} \end{aligned}$$

et de même,

$$\sum_{k=-n}^0 e^{ikx} = \sum_{k=0}^n e^{-ikx} = -\frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{ix/2}}{2i \sin x/2}$$

De là,

$$\begin{aligned}
 D_n(x) &= \sum_{k=-n}^0 e^{ikx} + \sum_{k=0}^n e^{ikx} - 1 \\
 &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{2i \sin x/2} - \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{ix/2}}{2i \sin x/2} - 1 \\
 &= \frac{2i \sin(n+1/2)x + 2i \sin x/2}{2i \sin x/2} - 1 \\
 &= \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}
 \end{aligned}$$

□

3 Le noyau de Fejér

Le noyau de Fejér est la moyenne arithmétique des noyaux de Dirichlet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$$

La fonction $K_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le *noyau de Fejér*.

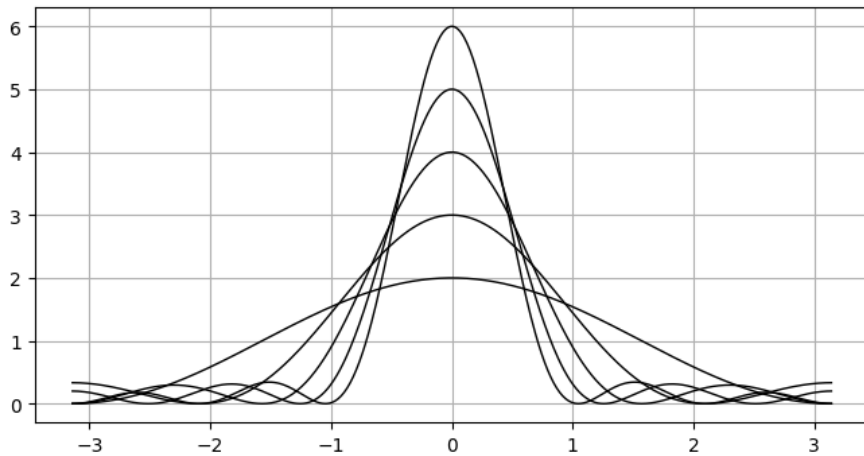


FIGURE 2 – Le noyau de Fejér K_n pour $1 \leq n \leq 5$

Proposition 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- K_n est pair et 2π -périodique.
- $K_n(0) = n+1$.
-

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, D_k est pair et 2π -périodique. Il en est donc de même pour K_n . On a

$$\begin{aligned}
 K_n(0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(0) \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (2k+1) \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} (n(n+1) + n+1) \\
 &= n+1
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

Proposition 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x$$

Évaluons la somme d'exponentielles correspondant à la somme de sinus du membre de droite.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n e^{i(k+1/2)x} &= e^{ix/2} \sum_{k=0}^n e^{ikx} \\
 &= e^{ix/2} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
 &= e^{ix/2} \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-ix/2}}{2i \sin x/2} \\
 &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{2i \sin x/2} \\
 &= \frac{\sin(n+1)x}{2 \sin x/2} + i \frac{1 - \cos(n+1)x}{2 \sin x/2}
 \end{aligned}$$

En prenant les parties imaginaires des deux membres, il vient

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1 - \cos(n+1)x}{2 \sin x/2} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$

d'où le résultat. $\square$

Corollaire 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $K_n(x) \geq 0$.

Corollaire 7. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, \pi]$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$. Alors

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)}$$

Démonstration. Écrivons

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x}$$

On a $1 - \cos(n+1)x \leq 2$ et $1 - \cos x \geq 1 - \cos \delta$, d'où le résultat. $\square$

4 Sommes de Fourier

Soit f une fonction 2π -périodique intégrable sur tout segment. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} coefficient de Fourier de f est

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikx}$$

La fonction $s_n(f)$ est la n^{e} somme de Fourier associée à f . On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f)$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x-t) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t) f(t) dt\end{aligned}$$

Le changement de variable $u = x - t$ montre que l'on a aussi

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t) dt$$

Théorème 8. [FEJÉR]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π -périodique. La suite $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit M le maximum de $|f|$ sur le segment $[-\pi, \pi]$ (et donc, par périodicité, sur $\mathbb{R}$). Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et donc, par périodicité, sur $\mathbb{R}$. Soit $\delta > 0$ tel que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$ tels que $|t| \leq \delta$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon/3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_n(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt + \frac{M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le corollaire 7. On a

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt \leq \frac{2(\pi - \delta)}{(n+1)(1 - \cos \delta)}$$

L'intégrale ci-dessus tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt \leq \frac{\pi \varepsilon}{3M}$$

On a pour les mêmes raisons

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt \leq \frac{\pi \varepsilon}{3M}$$

Remarquons aussi que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$$

On a donc pour tout $n \geq N$,

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{\pi} \frac{\pi\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\pi\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

d'où la convergence uniforme. $\square$

La figure 3 montre en rouge le graphe de la fonction paire et 2π périodique f définie pour $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{x}$. En noir, les graphes des sommes de Fejér $\sigma_n(f)$ pour quelques valeurs de n .

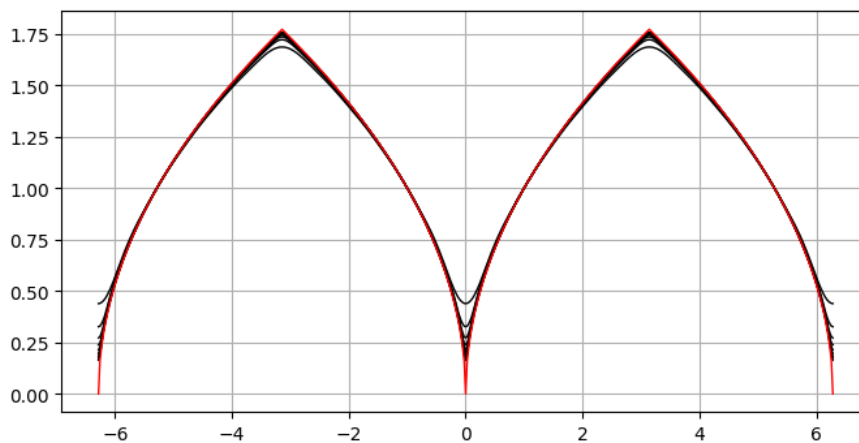


FIGURE 3 – Convergence des sommes de Fejér