

Fonctions hyperboliques

Marc Lorenzi

2 septembre 2025

1 Cosinus et sinus hyperboliques

1.1 Introduction

On définit les fonctions $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique*.

Les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. De plus, ch est paire et sh est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x > 0$$

La fonction sh est donc strictement croissante. Or, $\operatorname{sh} 0 = 0$, donc $\operatorname{sh} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{sh} < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x > 0$$

La fonction ch est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est paire, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}e^x + o(1)$$

et de même pour $\operatorname{sh} x$. Dans la figure ci-dessus, la courbe en pointillés est celle de la fonction $x \longmapsto e^x/2$.

La restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_+$ est continue, strictement croissante. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[\operatorname{ch} 0, \lim_{+\infty} \operatorname{ch}[= [1, +\infty[$.

La fonction sh est quant à elle continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty} \operatorname{sh}, \lim_{+\infty} \operatorname{sh}[= \mathbb{R}$.

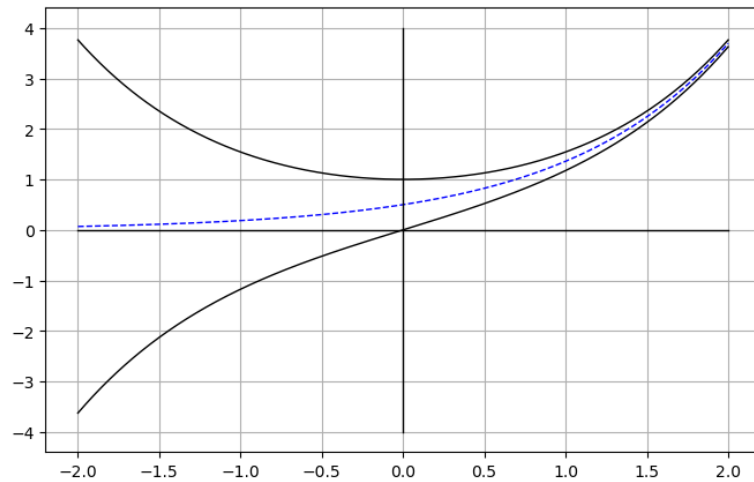


FIGURE 1 – Les fonctions ch et sh

1.2 Formules de trigonométrie

Tout comme en trigonométrie classique, nous avons un certain nombre de « formules » relatives au cosinus et au sinus hyperbolique.

Proposition 1. *Pour tout réel x ,*

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Démonstration. Les deux premières égalités résultent directement de la définition de ch et sh. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x e^{-x} = 1$$

□

Proposition 2. *Pour tous réels a et b ,*

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a - b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On a

$$e^{\varepsilon(a+b)} = \operatorname{ch}(a+b) + \varepsilon \operatorname{sh}(a+b)$$

mais aussi, comme $\varepsilon^2 = 1$,

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(a+b)} &= e^{\varepsilon a} e^{\varepsilon b} \\ &= (\operatorname{ch} a + \varepsilon \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \varepsilon \operatorname{sh} b) \\ &= (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b) + \varepsilon(\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b) + (\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b)$$

$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b) - (\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b)$$

On en déduit les deux premières égalités demandées en ajoutant et en soustrayant. Les deux dernières égalités s'en déduisent en remplaçant b par $-b$ et en utilisant la parité de ch et l'impairité de sh . $\square$

Proposition 3. Pour tout réel x ,

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Démonstration. Ce sont des cas particuliers de la proposition précédente. Les deux dernières expressions égales à $\operatorname{ch} 2x$ sont obtenues en utilisant $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. $\square$

Corollaire 4. Pour tout réel x ,

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

Démonstration. Résulte de

$$\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1$$

$\square$

Proposition 5. Pour tous réels a et b ,

$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b &= 2 \operatorname{ch} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2} \\ \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b &= 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$p = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{a-b}{2}$$

On a $a = p + q$ et $b = p - q$. De là,

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b &= \operatorname{sh}(p+q) + \operatorname{sh}(p-q) \\ &= (\operatorname{sh} p \operatorname{ch} q + \operatorname{ch} p \operatorname{sh} q) + (\operatorname{sh} p \operatorname{ch} q - \operatorname{ch} p \operatorname{sh} q) \\ &= 2 \operatorname{sh} p \operatorname{ch} q\end{aligned}$$

D'où la première égalité. Les autres égalités se démontrent de la même façon. $\square$

Proposition 6. Pour tous réels a et b ,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2} \operatorname{ch}(a+b) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(a-b) \\ \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{1}{2} \operatorname{ch}(a+b) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(a-b) \\ \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(a+b) + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(a-b)\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite des égalités. $\square$

1.3 Polynômes de Tchebychev

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\operatorname{ch} nx + \varepsilon \operatorname{sh} nx = e^{\varepsilon nx} = (e^{\varepsilon x})^n = (\operatorname{ch} x + \varepsilon \operatorname{sh} x)^n$$

En développant à l'aide de la formule du binôme,

$$\operatorname{ch} nx + \varepsilon \operatorname{sh} nx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k \operatorname{sh}^k x \operatorname{ch}^{n-k} x = S_1 + \varepsilon S_2$$

où

$$S_1 = \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} \operatorname{sh}^{2j} x \operatorname{ch}^{n-2j} x \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} \operatorname{sh}^{2j+1} x \operatorname{ch}^{n-2j-1} x$$

On a donc

$$\begin{cases} \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx &= S_1 + S_2 \\ \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx &= S_1 - S_2 \end{cases}$$

En ajoutant et en soustrayant, on obtient

$$\operatorname{ch} nx = S_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} nx = S_2$$

Remarquons que, comme $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$, $\operatorname{ch} nx$ est un polynôme en $\operatorname{ch} x$.

Proposition 7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} nx$$

Démonstration. Nous avons déjà montré l'existence. Supposons que T_n, U_n conviennent. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(T_n - U_n)(\operatorname{ch} x) = 0$$

Le polynôme $T_n - U_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. $\square$

Le polynôme T_n est le n^e polynôme de Tchebychev.

Proposition 8. *On a $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} 0x = 1 = T_0(\operatorname{ch} x)$$

Clairement, $T_0 = 1$ convient. On termine par l'unicité de ce polynôme. De même,

$$\operatorname{ch} 1x = \operatorname{ch} x = T_1(\operatorname{ch} x)$$

et $T_1 = X$ convient, c'est donc lui.

Rappelons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{ch} \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} \frac{a+b}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en prenant $a = (n+2)x$ et $b = nx$,

$$\operatorname{ch}(n+2)x + \operatorname{ch} nx = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch}(n+1)x$$

d'où

$$T_{n+2}(\operatorname{ch} x) + T_n(\operatorname{ch} x) = 2 \operatorname{ch} x T_{n+1}(\operatorname{ch} x)$$

Le polynôme $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. $\square$

Proposition 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de même parité que n . Le polynôme T_n est de degré n . Si $n \geq 1$, son coefficient dominant est 2^{n-1} .*

Démonstration. C'est une récurrence à deux termes sur n . $\square$

Remarque. Par la parité de T_n on a

$$T_n(-\operatorname{ch} x) = (-1)^n T_n(\operatorname{ch} x) = (-1)^n \operatorname{ch} nx$$

On « connaît » donc les valeurs prises par T_n sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$. Remarquons que sur ces intervalles, T_n ne s'annule pas puisque la fonction ch ne s'annule pas. Il s'avère que les valeurs intéressantes pour T_n se trouvent dans le segment $[-1, 1]$. On peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(\cos x) = \cos nx$$

Mais ceci nous éloigne de notre sujet, les fonctions hyperboliques.

1.4 Linéarisation

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n} (e^x + e^{-x})^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx} e^{-(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{(2k-n)x}$$

Le changement d'indice $k' = n - k$ montre que l'on a aussi

$$\operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-(2k-n)x}$$

En ajoutant et en divisant par 2, il vient

$$\operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(2k - n)x$$

Procédons de même pour le sinus hyperbolique. On a

$$\operatorname{sh}^n x = \frac{1}{2^n} (e^x - e^{-x})^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kx} e^{-(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{(2k-n)x}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\operatorname{sh}^n x = (-1)^n \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{(2k-n)x}$$

Le changement d'indice $k' = n - k$ montre que l'on a aussi

$$\operatorname{sh}^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{-(2k-n)x}$$

Deux cas surviennent.

- Cas 1, n est pair. En ajoutant et en divisant par 2, il vient

$$\operatorname{sh}^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{ch}(2k - n)x$$

- Cas 2, n est impair. Toujours en ajoutant et en divisant par 2, il vient

$$\operatorname{sh}^n x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(2k - n)x$$

1.5 Interprétation géométrique

Proposition 10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$. Il existe un unique réel t tel que $x = \operatorname{ch} t$ et $y = \operatorname{sh} t$.

Démonstration. La fonction sh est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \operatorname{sh} t$. De là,

$$x^2 = 1 + y^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$$

Comme x est $\operatorname{ch} t$ sont positifs, $x = \operatorname{ch} t$, d'où l'existence. Supposons maintenant que $x = \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} u$ et $y = \operatorname{sh} t = \operatorname{sh} u$ où $t, u \in \mathbb{R}$. La fonction sh étant injective, $t = u$, d'où l'unicité. $\square$

La courbe d'équation

$$(H) \quad x^2 - y^2 = 1$$

est une hyperbole. Cette courbe est composée de deux branches symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite Oy . Notons (H') la branche de droite, c'est à dire

$$H' = H \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

La proposition précédente nous dit que tout point (x, y) de (H') s'écrit de façon unique $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ où $t \in \mathbb{R}$. Remarquons qu'inversement, pour tout réel t , le point $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ appartient à H' . Nous avons donc obtenu un paramétrage de H' .

$$(H') \quad \begin{cases} x &= \operatorname{ch} t \\ y &= \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si nous appelons H'' la branche de gauche de H , un paramétrage de H'' est

$$(H'') \quad \begin{cases} x &= -\operatorname{ch} t \\ y &= \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2 Tangente hyperbolique

2.1 Introduction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

La fonction th est impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$$

La première égalité montre que $\operatorname{th}' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc que la fonction th est strictement croissante.

En remplaçant $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ par leur définition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\operatorname{th} x$ tend vers 1. Par imparité, lorsque x tend vers $-\infty$, $\operatorname{th} x$ tend vers -1 .

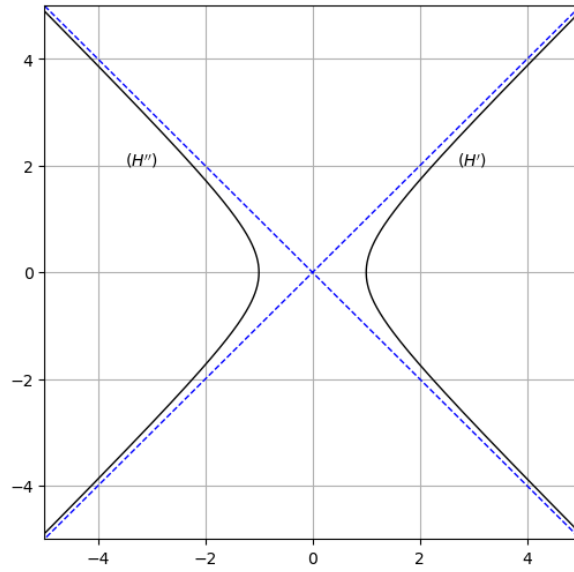


FIGURE 2 – L'hyperbole H

2.2 Formules

Proposition 11. *Pour tous réels a et b ,*

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{th}(a - b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{sh}(a + b)}{\operatorname{ch}(a + b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}$$

On en déduit la première égalité en divisant le numérateur et le dénominateur par $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$. La deuxième égalité s'obtient à partir de la première en remplaçant b par $-b$. $\square$

Proposition 12. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition précédente. $\square$

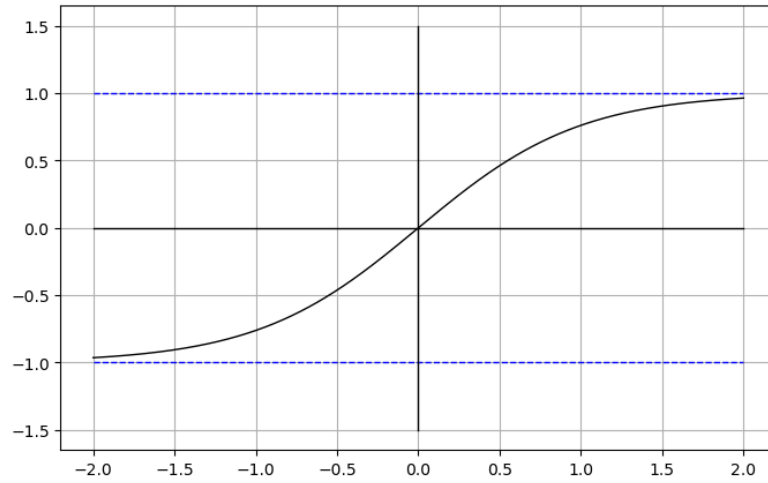


FIGURE 3 – La fonction th

3 Cotangente hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

La fonction $\coth$ est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\coth' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

La première égalité montre que $\coth' < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc que la fonction $\coth$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

En remplaçant $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ par leur définition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\coth x$ tend vers 1. Par imparité, lorsque x tend vers $-\infty$, $\coth x$ tend vers -1 .

3.1 Formules

Proposition 13. Pour tous réels a et b tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$,

- Si $a + b \neq 0$, alors

$$\coth(a + b) = \frac{1 + \coth a \coth b}{\coth a + \coth b}$$

- Si $a - b \neq 0$, alors

$$\coth(a - b) = \frac{1 - \coth a \coth b}{\coth a - \coth b}$$

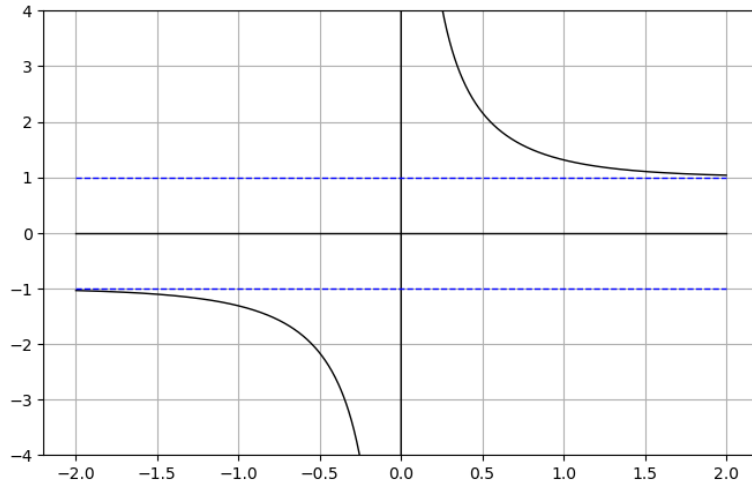


FIGURE 4 – La fonction $\coth$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. On a

$$\coth(a + b) = \frac{\operatorname{ch}(a + b)}{\operatorname{sh}(a + b)} = \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b}$$

On en déduit la première égalité en divisant le numérateur et le dénominateur par $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$. La deuxième égalité s'obtient à partir de la première en remplaçant b par $-b$. $\square$

Proposition 14. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x}$$

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition précédente. $\square$

4 Fonctions hyperboliques réciproques

4.1 Argument sinus hyperbolique

La fonction sh est continue, strictement croissante, sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty} \operatorname{sh}, \lim_{+\infty} \operatorname{sh}[= \mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction « argument sinus hyperbolique », que nous noterons argsh . La fonction argsh est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Mieux, comme sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}' > 0$, la fonction argsh est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 15. Pour tout réel x ,

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y = \operatorname{argsh} x$. On a $\operatorname{sh} y = x$, c'est à dire

$$e^y - e^{-y} = 2x$$

ou encore, en multipliant par e^y ,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

En posant $Y = e^y$, on obtient l'équation du second degré

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0$$

dont le discriminant est $4(x^2 + 1) > 0$. Cette équation a deux racines réelles distinctes qui sont

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

La racine affectée du signe moins ne nous intéresse pas car $Y = e^y > 0$. On a donc

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 16. *Pour tout réel x ,*

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Démonstration. On peut tout simplement dériver l'expression de $\operatorname{argsh} x$. Une autre possibilité est d'écrire

$$\operatorname{argsh}' x = (\operatorname{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x))}$$

Il reste à remarquer que

$$\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{sh}^{-1}(x)) + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

$\square$

4.2 Argument cosinus hyperbolique

La fonction ch est continue, strictement croissante, sur $\mathbb{R}_+$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[\operatorname{ch} 0, \lim_{+\infty} \operatorname{ch}] = [1, +\infty[$. Sa réciproque est la fonction « argument cosinus hyperbolique », que nous noterons argch . On a donc

$$\operatorname{argch} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$

La fonction argch est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$. Mieux, comme ch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\operatorname{ch}' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction argch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. En revanche, $\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0$, donc argch n'est pas dérivable en 1. Plus précisément, la courbe de argch admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

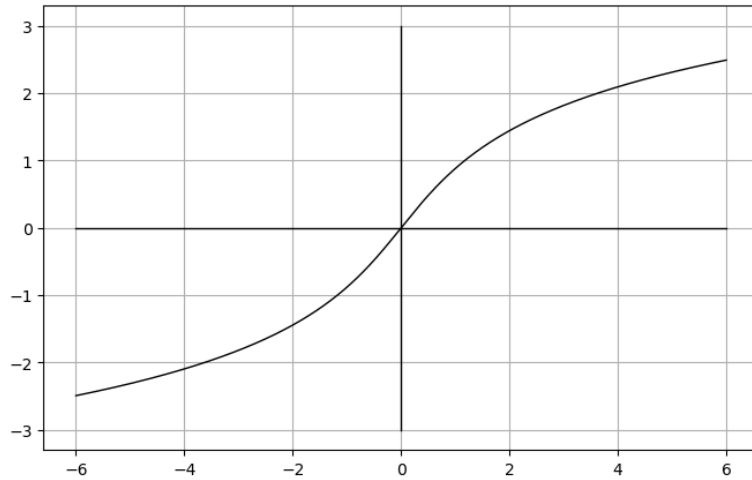


FIGURE 5 – La fonction argsh

Proposition 17. *Pour tout réel $x \geq 1$,*

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y = \operatorname{argch} x$. On a $\cosh y = x$, c'est à dire

$$e^y + e^{-y} = 2x$$

ou encore, en multipliant par e^y ,

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

En posant $Y = e^y$, on obtient l'équation du second degré

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0$$

dont le discriminant est $4(x^2 - 1) \geq 0$. Cette équation a deux racines réelles (distinctes si $x \neq 1$) qui sont

$$Y', Y'' = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Remarquons que le produit des racines est $Y'Y'' = 1$. Les deux racines ont le même signe. De plus, $Y' + Y'' = 2x > 0$ donc Y' et Y'' sont strictement positives. Elles correspondent aux deux réels

$$y', y'' = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

On a

$$y' + y'' = \ln(Y'Y'') = \ln 1 = 0$$

Les deux réels y' et y'' sont opposés. Celui qui nous intéresse est positif, c'est le plus grand des deux. Ainsi,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

□

Proposition 18. Pour tout réel $x > 1$,

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Démonstration. On peut tout simplement dériver l'expression de $\operatorname{argch} x$. Une autre possibilité est d'écrire $\operatorname{argch} = \varphi^{-1}$ où $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$ est la bijection définie par

$$\varphi(x) = \operatorname{ch} x$$

On a pour tout $x > 1$,

$$\operatorname{argch}' x = (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\varphi^{-1}(x))}$$

Il reste à remarquer que

$$\operatorname{sh}(\varphi^{-1}(x)) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\varphi^{-1}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Il s'agit bien de prendre la racine carrée positive, car $\operatorname{sh}(\varphi^{-1}(x)) > 0$. $\square$

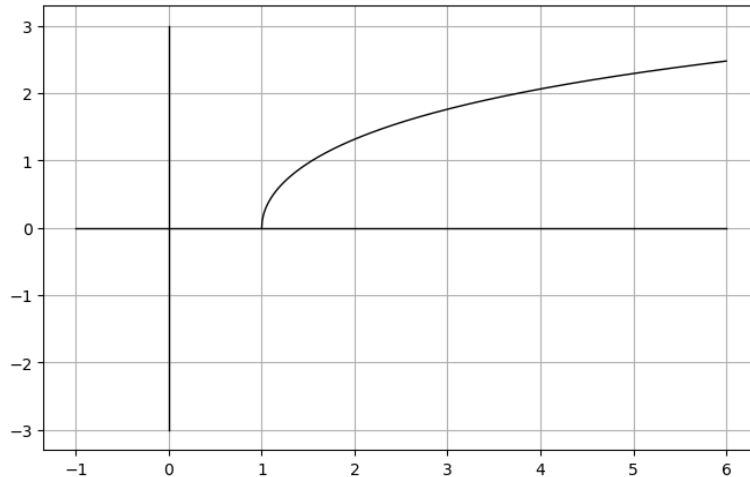


FIGURE 6 – La fonction argch

4.3 Argument tangente hyperbolique

La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty} \operatorname{th}, \lim_{+\infty} \operatorname{th} [=] -1, 1 [$. Sa réciproque est la fonction *argument tangente hyperbolique*, nous la noterons argth . La fonction argth est une bijection de $] -1, 1 [$ sur $\mathbb{R}$. Comme th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}' > 0$, la fonction argth est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1 [$.

Proposition 19. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Démonstration. Soit $x \in]-1, 1[$. Soit $y = \operatorname{argth} x$. On a $\operatorname{th} y = x$ ou encore, en utilisant l'une des expressions de th ,

$$e^{2y} - 1 = x(e^{2y} + 1)$$

On en déduit

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 20. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

De là,

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$$

$\square$

Proposition 21. Pour tous $a, b \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{argth} a + \operatorname{argth} b = \operatorname{argth} \frac{a+b}{1+ab}$$

Démonstration. Soient $x = \operatorname{argth} a$ et $y = \operatorname{argth} b$. On a

$$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} = \operatorname{th}(x+y)$$

De là,

$$\operatorname{argth} \frac{a+b}{1+ab} = \operatorname{argth} \operatorname{th}(x+y) = x+y = \operatorname{argth} a + \operatorname{argth} b$$

$\square$

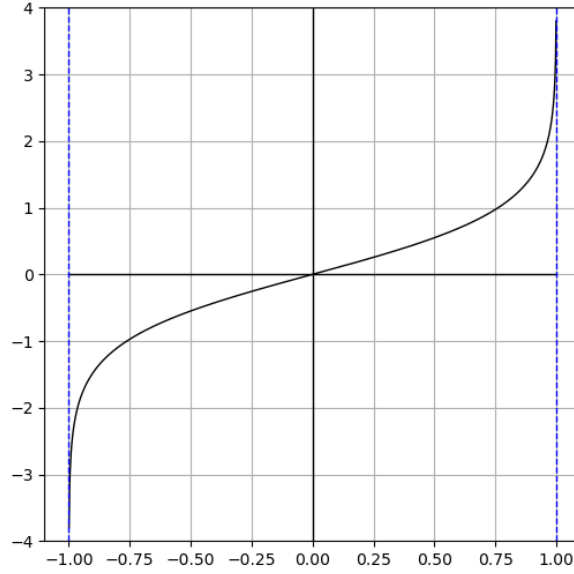


FIGURE 7 – La fonction argh

Les calculs de la démonstration ci-dessus montrent que pour tous $a, b \in E =]-1, 1[$,

$$a \star b = \frac{a + b}{1 + ab} \in E$$

En effet, cette quantité est une tangente hyperbolique. L'opération $\star$ est donc une loi de composition interne sur E . De plus, pour tous $a, b \in E$,

$$\operatorname{argh}(a \star b) = \operatorname{argh} a + \operatorname{argh} b$$

Ainsi, argh est un morphisme bijectif de $(E, \star)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Proposition 22. *$(E, \star)$ est un groupe abélien.*

Démonstration. La commutativité de $\star$ est évidente. Le neutre pour $\star$ est 0. L'opposé de $a \in E$ pour $\star$ est $-a$. Soient $a, b, c \in E$. On a

$$\operatorname{argh}((a \star b) \star c) = \operatorname{argh}(a \star b) + \operatorname{argh} c = (\operatorname{argh} a + \operatorname{argh} b) + \operatorname{argh} c$$

d'où, facilement, l'associativité de $\star$. $\square$

4.4 Argument cotangente hyperbolique

La fonction φ , restriction de $\coth$ à $\mathbb{R}_+^*$, est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $] \lim_{+\infty} \coth, \lim_0 \coth[=]1, +\infty[$. Sa réciproque est la fonction *argument cotangente hyperbolique*, que nous noterons $\operatorname{argcoth}$. On a donc

$$\operatorname{argcoth} :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\varphi' < 0$, la fonction $\operatorname{argcoth}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Proposition 23. *Pour tout réel $x > 1$,*

$$\operatorname{argcoth} x = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

Démonstration. Soit $x > 1$. Soit $y = \operatorname{argcoth} x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\coth y = x$, ce qui s'écrit encore

$$e^{2y} + 1 = x(e^{2y} - 1)$$

d'où

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

puis le résultat. $\square$

Proposition 24. *Pour tout réel $x > 0$,*

$$\operatorname{argcoth}' x = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

Démonstration. Soit $x > 1$. On a

$$\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1)$$

De là,

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

$\square$

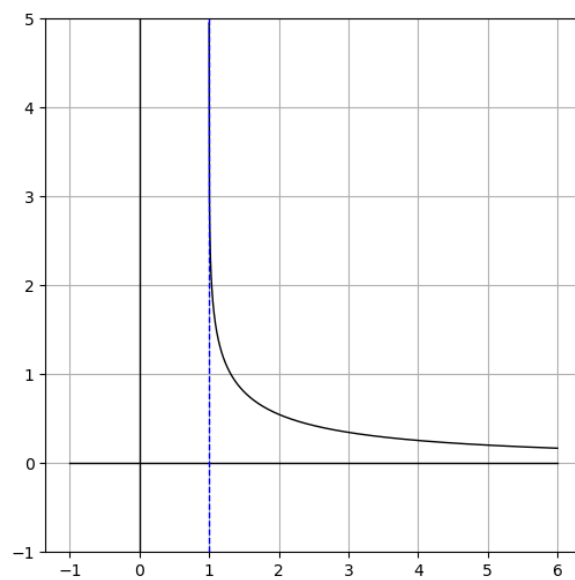


FIGURE 8 – La fonction $\operatorname{argcoth}$