

L'intégrale de Dirichlet

Marc Lorenzi

6 juillet 2025

1 Introduction

La fonction $\text{sinc} : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. De plus, lorsque x tend vers 0, $\text{sinc } x$ tend vers 1. On peut donc prolonger sinc à $\mathbb{R}$ en posant $\text{sinc } 0 = 1$. La fonction sinc est le *sinus cardinal*. En fait, sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, elle y est développable en série entière : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sinc } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

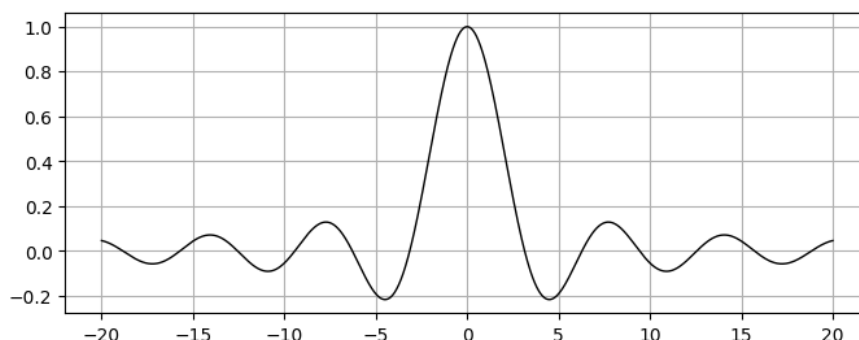


FIGURE 1 – La fonction sinus cardinal

La fonction *sinus intégral* est la primitive de sinc sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

La fonction Si est impaire. Voici son graphe.

Nous allons montrer que Si a une limite réelle égale à $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est l'intégrale de Dirichlet.

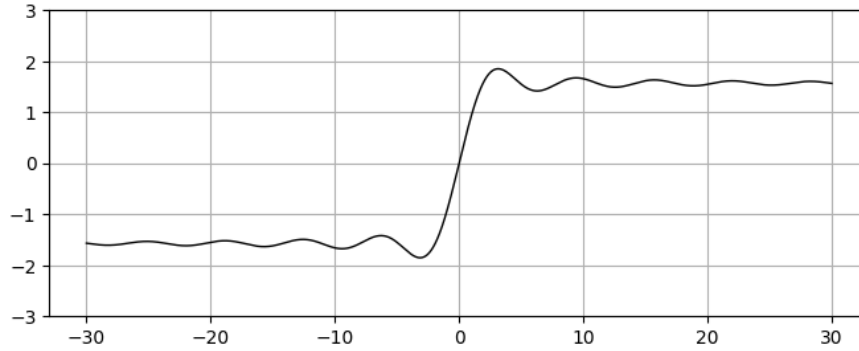


FIGURE 2 – La fonction sinus intégral

2 Convergence

Commençons par prouver l'existence de l'intégrale de Dirichlet.

Proposition 1. *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est convergente.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle tend vers 1 lorsque x tend vers 0. L'intégrale de cette fonction sur $]0, \pi]$ est donc convergente. Soit $n \geq 1$. On a

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

En posant $x = t + k\pi$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t + k\pi)}{t + k\pi} dt = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt$$

On a

$$I_{k+1} - I_k = \int_0^{\pi} \sin t \left(\frac{1}{t + (k+1)\pi} - \frac{1}{t + k\pi} \right) dt \leq 0$$

La suite $(I_k)_{k \geq 1}$ est donc décroissante. De plus,

$$0 \leq I_k \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{k\pi} dt = \frac{1}{k}$$

Ainsi, I_k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. En conclusion, la série $\sum (-1)^k I_k$ est une série alternée convergente. L'intégrale $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ a donc une limite lorsque n tend vers l'infini, et cette limite est

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k$$

Pour tout $a \geq \pi$, soit n l'unique entier supérieur ou égal à 1 tel que

$$n\pi \leq a < (n+1)\pi$$

Précisément, $n = \lfloor a/\pi \rfloor$. On a alors

$$\int_{\pi}^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{n\pi}^a \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=1}^n (-1)^k I_k + R_n$$

où

$$R_n = \int_{n\pi}^a \frac{\sin x}{x} dx$$

On a

$$|R_n| \leq \int_{n\pi}^a \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \frac{a - n\pi}{n\pi} < \frac{1}{n}$$

et donc, R_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Lorsque a tend vers $+\infty$, $n = \lfloor a/\pi \rfloor$ tend aussi vers $+\infty$, donc

$$\int_{\pi}^a \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$$

□

Proposition 2. *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

n'est pas absolument convergente.

Démonstration. En reprenant le début de la preuve de la proposition précédente, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^n I_k$$

où

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt$$

Remarquons que pour tout $k \geq 1$,

$$I_k \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Le minorant est le terme général d'une série divergente, donc la série $\sum I_k$ est aussi divergente. On en déduit que

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

et donc, a fortiori,

$$\int_{\pi}^a \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$$

□

3 Le calcul de l'intégrale

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction sous le signe intégral est continue sur $]0, \pi]$ et a une limite finie en 0 (qui est $n + \frac{1}{2}$), l'intégrale est donc bien définie.

Pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de l'égalité, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\int_0^\pi \cos kx dx = \frac{1}{k} [\sin kx]_0^\pi = 0$$

En intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et π , on obtient donc

$$2\pi = \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx + \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat. $\square$

Considérons la fonction $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Proposition 4. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Démonstration. Les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montrent que $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$. Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{2x^2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)) - x}{x^3 + o(x^3)} \\ &= -\frac{1}{24} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -1/24$.

Pour tout $x \in]0, \pi]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - 2 + 2 \cos x}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{8} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= -\frac{1}{24} + o(1)\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi'(x)$ tend vers $\varphi'(0)$ lorsque x tend vers 0, donc φ' est continue en 0. $\square$

Proposition 5. Soit $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin xt \, dt \longrightarrow 0$$

Démonstration. Ce résultat est un cas particulier du *lemme de Lebesgue*. Soit $x > 0$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varphi(t) \sin xt \, dt &= -\frac{1}{x} [\varphi(t) \cos xt]_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos xt \, dt \\ &= \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos \pi x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos xt \, dt\end{aligned}$$

On a

$$\left| \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos \pi x}{x} \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)|}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et aussi

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos xt \, dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^\pi |\varphi'(t)| \, dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 6.

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Reprenons la fonction φ définie plus haut. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varphi(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt &= \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \, dt - \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \, dt - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Posons dans l'intégrale $x = (n + \frac{1}{2})t$. On obtient

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx - \frac{\pi}{2}$$

d'où le résultat par la proposition 5. $\square$

Proposition 7.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé la convergence de l'intégrale. Notons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

Par caractérisation séquentielle des limites,

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$$

d'où $I = \frac{\pi}{2}$ par la proposition précédente. $\square$

Corollaire 8.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi$$

Démonstration. La fonction sous l'intégrale est paire. $\square$

4 Une autre preuve

Une façon plus directe (mais moins « élémentaire ») d'obtenir la valeur de l'intégrale de Dirichlet est d'utiliser le *théorème de Cauchy*. Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) = i$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$f(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z}$$

La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$$

Elle est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Cauchy, pour tout lacet γ ,

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0$$

Soit $R > 0$. Considérons le lacet $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ où γ' a pour support le segment $[-R, R]$ et γ'' a pour support le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R .

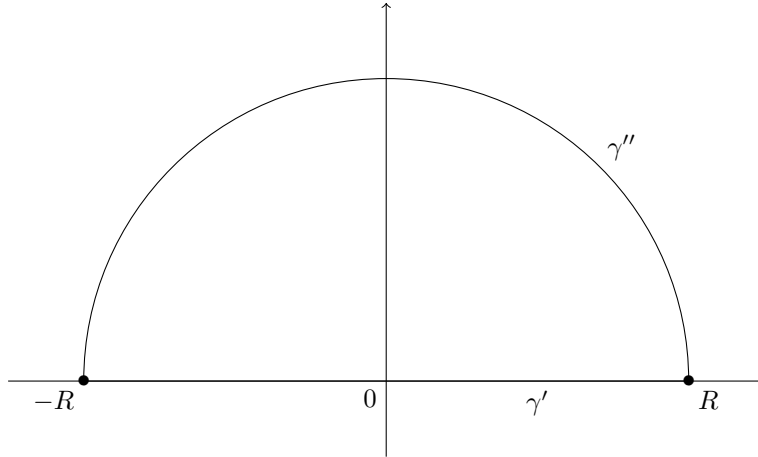


FIGURE 3 – Le lacet γ

On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos x - 1}{x} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

La première intégrale est l'intégrale d'une fonction impaire, elle est donc nulle. Ainsi,

$$\int_{\gamma'} f(z) dz = i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

Lorsque R tend vers l'infini, l'intégrale de f sur γ' tend donc vers

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Paramétrons γ'' par $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma''} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}} - 1}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^\pi (e^{iRe^{i\theta}} - 1) d\theta \\ &= -i\pi + i \int_0^\pi e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Majorons le module de l'intégrale ci-dessus :

$$\left| \int_0^\pi e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

Par un argument, par exemple, de concavité, pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$. De là,

$$\left| \int_0^\pi e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} d\theta \right| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, le majorant tend vers 0. L'intégrale de gauche tend donc aussi vers 0. Ainsi, l'intégrale de f sur γ'' tend vers $-i\pi$.

Écrivons maintenant que

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'} f(z) dz + \int_{\gamma''} f(z) dz$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0$$

Nous retrouvons la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$