

Inverse d'un réel

Marc Lorenzi

4 octobre 2022

Résumé

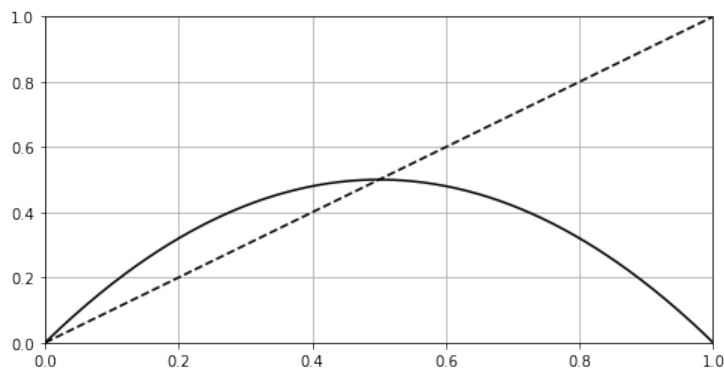
Nous allons décrire un algorithme permettant le calcul de l'inverse d'un réel en effectuant uniquement des multiplications et des additions. À la fin de l'article, nous aurons également besoin de faire des divisions par 2.

Dans tout l'article, a désigne un réel strictement positif. On considère la suite u définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - au_n^2$$

On suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{a}$.

Voici la courbe de la fonction $f : x \mapsto 2x - ax^2$. La fonction possède un maximum en $\frac{1}{a}$, qui est égal à $\frac{1}{a}$. En pointillés, la droite d'équation $y = x$. Elle coupe la courbe de f au point $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$. On a pris $a = 2$ pour faire le dessin.



Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{a}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 1 - au_{n+1} &= 1 - a(2u_n - au_n^2) \\ &= 1 - 2au_n + a^2u_n^2 \\ &= (1 - au_n)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} \leq \frac{1}{a}$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{a}$. Ceci est encore vrai, par hypothèse, pour $n = 0$.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse sur u_0 . Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$. On a alors

$$u_{n+1} = u_n(2 - au_n) > u_n(1 - au_n) \geq 0$$

Supposons maintenant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{1}{a}$. Prenons un tel n minimal. Par hypothèse sur u_0 , $n \geq 1$. On a donc

$$\frac{1}{a} = u_n = 2u_{n-1} - au_{n-1}^2$$

d'où

$$a^2 u_{n-1}^2 - 2au_{n-1} + 1 = (au_{n-1} - 1)^2 = 0$$

et donc $u_{n-1} = \frac{1}{a}$. Contradiction, par la minimalité de n . $\square$

Proposition 2. *La suite u est strictement croissante.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - au_n^2 \\ &= u_n(1 - au_n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3. *La suite u converge vers $\frac{1}{a}$.*

Démonstration. La suite u est croissante et majorée par $\frac{1}{a}$. Elle converge donc vers un réel $\ell \leq \frac{1}{a}$. De plus, par la croissance de u , $\ell \geq u_0 > 0$. Passons à la limite dans la relation de récurrence qui définit u . Il vient

$$\ell = 2\ell - a\ell^2$$

d'où $\ell(1 - a\ell) = 0$. Comme $\ell \neq 0$, on a donc $\ell = \frac{1}{a}$. $\square$

Proposition 4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 < \frac{1}{a} - u_n \leq \frac{1}{a}(1 - au_0)^{2^n}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{a} - u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - u_{n+1} &= \frac{1}{a} - 2u_n + au_n^2 \\ &= a \left(\frac{1}{a} - u_n \right)^2 \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{a} - u_n \leq \frac{1}{a}(1 - au_0)^{2^n}$$

C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'inégalité vraie pour n . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - u_{n+1} &= a \left(\frac{1}{a} - u_n \right)^2 \\ &\leq a \frac{1}{a^2} \left((1 - au_0)^{2^n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{a} (1 - au_0)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

□

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{1}{a} - u_n \leq \varepsilon$ dès que

$$(1 - au_0)^{2^n} \leq a\varepsilon$$

ou encore

$$2^n \lg(1 - au_0) \leq \lg(a\varepsilon)$$

En divisant par $\lg(1 - au_0)$ qui est strictement négatif, cette inégalité équivaut à

$$2^n \geq \frac{\lg(a\varepsilon)}{\lg(1 - au_0)}$$

ou encore, en reprenant le logarithme en base 2,

$$n \geq \lg \frac{\lg(a\varepsilon)}{\lg(1 - au_0)}$$

Le choix de u_0

Posons-nous pour terminer la question du choix de u_0 . Considérons la suite v définie par $v_0 = 1$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $v_{m+1} = \frac{1}{2}v_m$. La suite v est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. On a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $v_m = \frac{1}{2^m}$. Choisissons m pour que $v_m < \frac{1}{a}$, c'est à dire

$$2^m > a$$

ou encore

$$m > \lg a$$

En posant $u_0 = v_m$, on a alors $0 < au_0 < 1$.

Dans le graphique ci-dessous on a pris $a = 2$. Le graphique représente, pour $p \leq 10^{10}$, $\lg a + 1 + n$ où n est un entier tel que $\frac{1}{a} - u_n \leq 10^{-p}$. Le réel u_0 est déterminé comme expliqué un peu plus haut. Pour obtenir 10 milliards de chiffres exacts, il suffit de 37 itérations.

