

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

1 Somme de deux arcs tangente

Soient a et b deux réels. Que vaut $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$?

1.1 Le cas $ab = 1$

Proposition 1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- Si $a > 0$, alors $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$.
- Si $a < 0$, alors $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x non nul par

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$. Ainsi, f est constante sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque $ab < 1$.

1.2 Le cas $ab < 1$

Proposition 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab < 1$. On a

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'égalité est évidente. Supposons donc a et b non nuls. Posons $\alpha = \operatorname{Arctan} a$ et $\beta = \operatorname{Arctan} b$.

Commençons par traiter le cas où $a > 0$, de sorte que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme $ab < 1$,

$$\tan \beta < \frac{1}{\tan \alpha} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Par la croissance stricte de la fonction tangente sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$ et donc

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

Le plus dur est fait. On a maintenant

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} &= \operatorname{Arctan} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \operatorname{Arctan}(\tan(\alpha + \beta)) \\ &= \alpha + \beta \\ &= \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b\end{aligned}$$

Supposons maintenant $a < 0$. Si $b > 0$, il suffit d'échanger les rôles de a et b et on est ramenés au cas précédent. Si $b < 0$, on applique le premier cas à $-a$ et $-b$, puis on conclut grâce à l'impairité de la fonction Arctan . $\square$

Pour terminer, que se passe-t-il si $ab > 1$?

1.3 Le cas $ab > 1$

Nous épargnerons au lecteur la preuve du résultat suivant.

Proposition 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab > 1$.

- Si a et b sont strictement positifs,

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} + \pi$$

- Si a et b sont strictement négatifs,

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab} - \pi$$

2 La formule de Machin

Venons-en à ce qui nous intéresse.

Proposition 4.

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

Démonstration. On utilise de façon répétée la proposition 2. Tout d'abord, $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} < 1$ et donc

$$2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5} \frac{1}{5}} = \operatorname{Arctan} \frac{5}{12}$$

Ensuite, $\frac{5}{12} \times \frac{1}{12} < 1$ et donc

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{Arctan} \frac{5}{12} = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12} \frac{5}{12}} = \operatorname{Arctan} \frac{120}{119}$$

Enfin, $\frac{120}{119} \times \frac{-1}{239} < 0 < 1$ et donc, par l'imparité de Arctan,

$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \operatorname{Arctan} \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \frac{1}{239}} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Le lecteur suspicieux remarquera que $120 \times 239 - 119 = 119 \times 239 + 120 = 28561$.
□

Le mathématicien anglais John Machin a utilisé cette formule au début du XVIII^e siècle pour calculer les 100 premières décimales de π . Voici un extrait du « *Synopsis Palmariorum Matheseos : Or, A New Introduction to the Mathematics Containing the Principles of Arithmetic and Geometry Demonstrated, In a Short and Easie Method ; With Their Application to the most Useful Parts thereof : As, Resolving of Equations, Infinite Series, Making the Logarithms ; Interest, Simple and Composite ; Mensuration of Surfaces and Solids ; The Fundamental Precepts of Perspective ; Trigonometry ; The Laws of Motion apply'd to Mechanic Powers, &c* », publié en 1706 par W. Jones (les anciens aimaient bien les titres courts).

Theref. the (Radius is to $\frac{1}{2}$ Periphery, or) Diameter is to the Periphery, as 1,000, &c. to 3,14159265358979323 8462643383279502884197.1693993751.0582097494.4592307816.4062862089.9862803482.5342117057.9 +, True to above a 100 Places ; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. John Machin : Purely as an Instance of the Vast advantage Arithmetical Calculations receive from the Modern Analysis, in a Subject that has bin of so Engaging a Nature, as to have employ'd the Minds of the most Eminent Mathematicians, in all Ages, to the Consideration of it. For as the exact Proportion between the Diameter and the Circumference can never be express'd in Numbers ; so the Improvements of those Enquirers the more plainly appear'd, by how much the more Easie and Ready, they render'd the Way to find a Proportion the nearest possible : But the Method of Series (as improv'd by Mr. Newton, and Mr. Halley) performs this with great Facility, when compared with the Intricate and Prolix Ways of Archimedes, Vieta, Van Ceulen, Metius, Snellius, Lansbergius, &c. Tho' some of them were said to have (in this Case) set Bounds to Human Improvements, and to have left

Comment Machin a-t-il procédé ?

3 Approximation numérique de l'arc tangente

Pour tout réel t et tout entier naturel n , on a (identité remarquable)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}$$

Soit $x \in [0, 1]$. Intégrons l'égalité ci-dessus entre 0 et x . Il vient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

ou encore

$$S_n = \operatorname{Arctan} x + (-1)^n I_n$$

où

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ et } I_n = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Remarquons maintenant que

$$0 \leq I_n \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

Comme $x \in [0, 1]$, $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par le théorème d'encadrement, I_n tend vers 0 et donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} x$$

L'erreur commise en approchant $\operatorname{Arctan} x$ par la somme S_n est majorée en valeur absolue par I_n . John Machin a utilisé sa formule en 1706 pour calculer les 100 premières décimales de π . Combien de termes doit-on ajouter pour obtenir les 1000 premières décimales de π ? Sans entrer dans les subtilités, une approximation de $\operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ et de $\operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$ à 10^{-1002} près suffiront. En effet, le calcul donnera π avec une erreur majorée par

$$16 \times 10^{-1002} + 4 \times 10^{-1002} = 2 \times 10^{-1001} < 10^{-1000}$$

On vérifie facilement que pour approcher $\operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$ il suffit de prendre $n = 209$. Pour $\operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$, $n = 714$ convient. Voici les 1000 premières décimales de π (1002 en fait), obtenues instantanément par une petite fonction Python.

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781
6406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231
7253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109
7566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664
8213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364
3678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919
5309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793
8183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702
7705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713
4275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892
3542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998
3729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850
3526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349
0428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927
87661119590921642019894
```