

Mélanges

Marc Lorenzi

23 juin 2024

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On considère la série formée à partir de la série harmonique alternée (SHA) $\sum (-1)^{n-1}/n$ comme suit.

- On prend les p premiers termes positifs de SHA et on les ajoute.
- On prend les q premiers termes négatifs de SHA et on les ajoute à la somme précédente.
- etc.

Pour tout $n \geq 1$, on note u_n le n^e terme de la série ainsi formée et S_n sa n^e somme partielle. Posons $r = p + q$. On a

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} \\ S_{2r} &= S_r + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \frac{1}{2q+4} - \dots - \frac{1}{4q} \\ S_{3r} &= S_{2r} + \frac{1}{4p+1} + \frac{1}{4p+3} + \dots + \frac{1}{6p-1} - \frac{1}{4q+2} - \frac{1}{4q+4} - \dots - \frac{1}{6q} \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_{nr} &= S_{(n-1)r} + \frac{1}{(2n-2)p+1} + \frac{1}{(2n-2)p+3} + \dots + \frac{1}{2np-1} \\ &\quad - \frac{1}{(2n-2)q+2} - \frac{1}{(2n-2)q+4} - \dots - \frac{1}{2nq} \end{aligned}$$

De là,

$$S_{nr} = \sum_{k=1}^{np-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = S' + S''$$

La somme S'' ne pose pas de problème.

$$S'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} H_{nq}$$

où

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

est le n^e nombre harmonique. Passons à S' .

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{k=1}^{np-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2np} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k} \\ &= H_{2np} - \frac{1}{2} H_{np} \end{aligned}$$

Rappelons le développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S_{nr} &= H_{2np} - \frac{1}{2} H_{np} - \frac{1}{2} H_{nq} \\ &= \ln(2np) + \frac{1}{4np} - \frac{1}{2} \ln(np) - \frac{1}{4np} - \frac{1}{2} \ln(nq) - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln \frac{2np}{\sqrt{n^2 pq}} - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln 2\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{1}{4nq} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en notant

$$\ell = \ln 2\sqrt{\frac{p}{q}}$$

nous avons

$$S_{nr} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$$

Le terme général de notre série tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Les suites de terme général S_{nr+1} , S_{nr+2} , $\dots$, S_{nr+r-1} tendent donc aussi vers ℓ . Par la réciproque du théorème des suites extraites, S_n tend vers ℓ . Finalement, la série converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln 2\sqrt{\frac{p}{q}}$$

Notons

$$E = \left\{ \ln 2\sqrt{t} : t \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Proposition 1. E est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$y = \frac{1}{4} e^{2x}$$

Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers y . Comme $y > 0$ on peut choisir ces rationnels dans $\mathbb{Q}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2\sqrt{t_n}) \in E$ et $\ln(2\sqrt{t_n})$ tend vers $\ln(2\sqrt{y}) = x$. $\square$