

Modules de continuité

Marc Lorenzi

17 novembre 2020

1 Introduction

1.1 Notion de module de continuité

Définition. On appelle *module de continuité* toute fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- ω est croissant.
- $\omega(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit ω un module de continuité. On dit que ω est un module de continuité pour f lorsque pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

Exemple. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne, où $k \geq 0$. La fonction $\omega : t \mapsto kt$ est un module de continuité pour f , puisque

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1.2 Une caractérisation

Proposition. La fonction f possède un module de continuité si et seulement si elle est uniformément continue sur I .

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que f possède un module de continuité ω . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\omega(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$t \leq \alpha \implies \omega(t) \leq \varepsilon$$

Soient $x, y \in I$. Supposons $|x - y| \leq \alpha$. On a alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \leq \varepsilon$$

f est donc uniformément continue sur I .

($\Leftarrow$) Supposons que f possède est uniformément continue sur I . Pour tout $t \geq 0$, soit

$$E_t = \{|f(x) - f(y)|, x, y \in I, |x - y| \leq t\}$$

La fonction f étant uniformément continue sur I , elle possède la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + \varepsilon$$

Prenons par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe donc $k > 0$ tel que, pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + 1$$

Soit $z \in E_t$. Soient $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq t$ et $z = |f(x) - f(y)|$. On a alors

$$z = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + 1 \leq kt + 1$$

Ainsi, E_t est majoré, et possède donc une borne supérieure que nous allons noter $\omega(t)$. Nous disposons donc d'une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie clairement

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

Il nous reste à montrer que ω tend vers 0 en 0. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est uniformément continue sur I , il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$,

$$|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons $t \leq \alpha$. Soit $z \in E_t$. Soient $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq t$ et $z = |f(x) - f(y)|$. On a alors $|x - y| \leq t \leq \alpha$, donc

$$z = |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, E_t est majoré par ε . $\omega(t)$, qui est la borne supérieure de E , est donc inférieur ou égal à ε . On a donc

$$\omega(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Pour terminer, la fonction ω est clairement croissante. Ainsi, ω est un module de continuité pour f .

1.3 Fonctions holdériennes

Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est holdérienne sur I lorsqu'il existe $k \geq 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ tels que pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$$

Les fonctions holdériennes sont donc celles qui admettent un module de continuité de la forme $\omega(t) = kt^\alpha$.

Proposition. La fonction « racine carrée » est holdérienne.

Démonstration. Soient $x, y \geq 0$ tels que $x \geq y$. On a

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - \sqrt{x - y}^2 = x + y - 2\sqrt{xy} - (x - y) = 2y - 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \leq 0$$

Ainsi,

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq \sqrt{x - y}^2$$

d'où

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x - y}$$

On en déduit aisément que pour tous $x, y \geq 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} = \omega(|x - y|)$$

où $\omega(t) = \sqrt{t}$. Ainsi, la fonction racine carrée est $\frac{1}{2}$ -holdérienne, et donc uniformément continue, sur $\mathbb{R}_+$.

Ce résultat se généralise.

Proposition. Soit $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est α -holdérienne sur $\mathbb{R}_+$.

Nous démontrons d'abord un lemme.

Lemme 1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$(x + y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$$

Démonstration. C'est évident lorsque $x = 0$. Supposons donc $x \neq 0$. En factorisant x^α , l'inégalité à montrer équivaut à

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha \leq 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(1 + t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha$$

Posons $\varphi(t) = (1 + t)^\alpha - 1 - t^\alpha$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$,

$$\varphi'(t) = \alpha((1 + t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) < 0$$

Ainsi, φ décroît strictement sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t) \leq 0$.

Venons-en à la preuve de la proposition.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Sans perte de généralité, supposons $x \geq y$. On a

$$x^\alpha = ((x - y) + y)^\alpha \leq (x - y)^\alpha + y^\alpha$$

Ainsi,

$$x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$$

c'est à dire, puisque $x \geq y$,

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$$

2 Le module optimal

2.1 C'est quoi ?

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\omega_f(t) = \sup E_t$$

où

$$E_t = \{|f(x) - f(y)|, x, y \in I, |x - y| \leq t\}$$

La fonction ω_f est appelée le *module de continuité optimal* de f .

Proposition. ω_f est un module de continuité pour f .

Démonstration. Soient $x, y \in I$. On a $|f(x) - f(y)| \in E_{|x-y|}$, et donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$$

Montrons maintenant que $\omega_f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant uniformément continue sur I , il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in I$,

$$|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $0 \leq t \leq \alpha$. Pour tout $z \in E_t$, on a $0 \leq z \leq \varepsilon$, et donc $\omega_f(t) \leq \varepsilon$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Notons $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des modules de continuité pour f .

Proposition. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\omega_f(t) = \min\{\omega(t), \omega \in \mathcal{M}(f)\}$$

Démonstration. La fonction ω_f est un module de continuité pour f , donc $\omega_f \in \mathcal{M}(f)$.

Soit $\omega \in \mathcal{M}(f)$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq t$. On a

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \leq \omega(t)$$

Ainsi, $\omega(t)$ majore E_f , donc $\omega_f(t) \leq \omega(t)$.

2.2 Exemples

- Soit $\alpha \in]0, 1[$. Nous avons vu que $\omega(t) = t^\alpha$ est un module de continuité de la fonction $f : t \mapsto t^\alpha$. En fait, $\omega = \omega_f$. En effet, soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a $\omega(t) = t^\alpha = |f(t) - f(0)| = t^\alpha \leq \omega_f(t - 0) = \omega_f(t)$. Ainsi, $\omega \leq \omega_f$. Par minimalité de ω_f , on a donc $\omega_f = \omega$.

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. La fonction f est 2-lipschitzienne, donc $\omega(t) = 2t$ est un module de continuité pour f . Mais ce n'est pas son module optimal.

Soient $x, y \in [0, 1]$ tels que $x \geq y$. Remarquons que $x + y \leq 2 - (x - y)$. De là,

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \leq (x - y)(2 - (x - y))$$

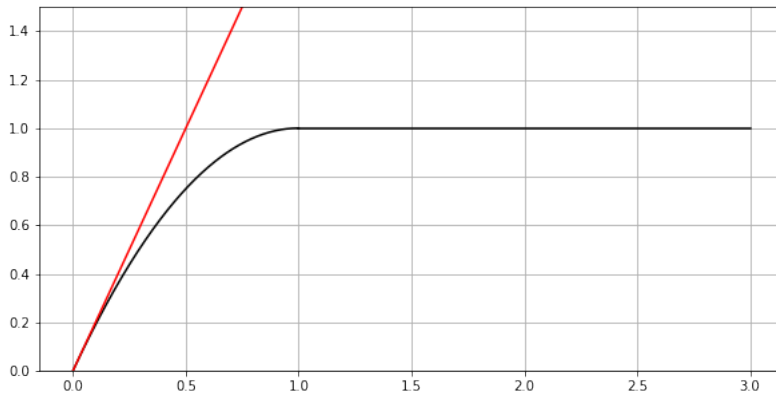
ou encore, puisque $x \geq y$,

$$|x^2 - y^2| \leq 2|x - y| - |x - y|^2$$

Par symétrie, cette inégalité est encore vraie lorsque $x \leq y$. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\omega(t) = 2t - t^2$ si $0 \leq t \leq 1$, et $\omega(t) = 1$ si $t > 1$. La fonction ω est un module de continuité pour f . Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, on a pour $x = 1$ et $y = 1 - t$,

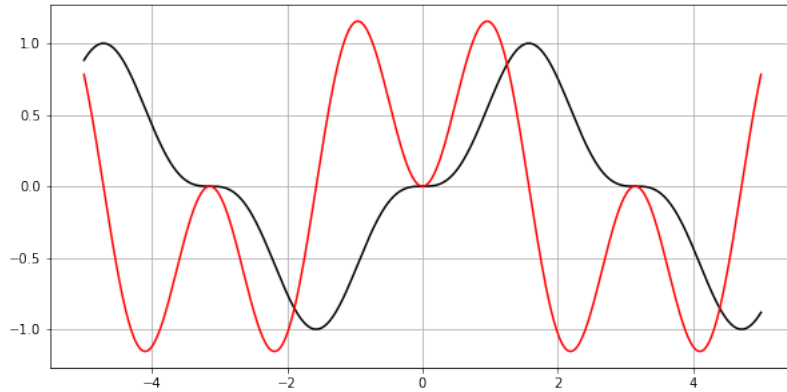
$$|x^2 - y^2| = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2 = \omega(t) \leq \omega_f(|x - y|) = \omega_f(t)$$

Ainsi, $\omega \leq \omega_f$ sur $[0, 1]$. Enfin, ω_f étant croissant, on a pour tout $t \geq 1$, $\omega_f(t) \geq \omega_f(1) \geq \omega(1) = 1 = \omega(t)$. Finalement, $\omega \leq \omega_f$ sur $\mathbb{R}_+$. Par minimalité de ω_f , on a donc $\omega_f = \omega$.



2.3 Encore un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin^3 x$. Voici les graphes de f (en noir) et de f' (en rouge).



Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$$

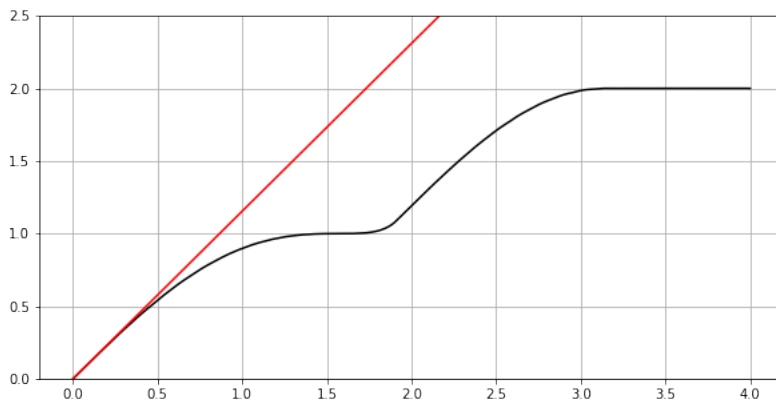
et

$$f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x = 3 \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \sin x (3 \cos^2 x - 1)$$

Le maximum de f' est obtenu pour $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ce maximum vaut

$$\sqrt{3} \sin^2 \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 1.15$$

Par imparité de f , le minimum de f' est l'opposé de cette valeur. Par l'inégalité des accroissements finis, f est donc k -lipschitzienne, où $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Voici le graphe de ω_f , obtenu de façon approchée, et la droite d'équation $y = kx$.



2.4 Sous-additivité

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Le module de continuité optimal de f est sous-additif :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \omega_f(s+t) \leq \omega_f(s) + \omega_f(t)$$

Démonstration. Soient $s, t \geq 0$. Soient $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq s + t$. Sans perte de généralité, supposons $x \geq y$ et $t \leq s$. On a

$$0 \leq x - y \leq s + t$$

et donc

$$-s \leq -t \leq (x - t) - y \leq s$$

d'où

$$|(x - t) - y| \leq s$$

De là,

$$|f(x - t) - f(y)| \leq \omega_f(s)$$

Par ailleurs,

$$|f(x) - f(x - t)| \leq \omega_f(t)$$

Écrivons

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x - t)| + |f(x - t) - f(y)| \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

Ceci est vrai pour tous x, y tels que $|x - y| \leq s + t$. En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\omega_f(s + t) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

3 Propriétés du module de continuité

3.1 Implications

Théorème. Soit ω un module de continuité. Chacune des propriétés ci-dessous implique la suivante.

- (i) ω est concave : pour tous $t, t' \geq 0$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\omega((1 - \lambda)t + \lambda t') \geq (1 - \lambda)\omega(t) + \lambda\omega(t')$.
- (ii) ω est sous-additif : pour tous $t, t' \geq 0$, $\omega(t + t') \leq \omega(t) + \omega(t')$.
- (iii) ω est uniformément continu.
- (iv) ω est sous-linéaire : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \geq 0$, $\omega(t) \leq at + b$.
- (v) ω est dominé par un module concave : il existe un module de continuité concave $\tilde{\omega}$ tel que $\omega \leq \tilde{\omega}$.

Ainsi, le module de continuité optimal vérifie les propriétés (ii) à (v). En revanche, comme le montre l'exemple vu un peu plus haut, ce n'est pas nécessairement une fonction concave.

Proposition. (i) $\implies$ (ii)

Démonstration. Supposons ω concave. Soient $t, t' \geq 0$. On a

$$t' = \frac{t}{t + t'} 0 + \frac{t'}{t + t'} (t + t')$$

d'où

$$\omega(t') \geq \frac{t}{t + t'} \omega(0) + \frac{t'}{t + t'} \omega(t + t')$$

De même,

$$\omega(t) \geq \frac{t'}{t + t'} \omega(0) + \frac{t}{t + t'} \omega(t + t')$$

Il vient, en ajoutant,

$$\omega(t) + \omega(t') \geq \omega(0) + \omega(t + t') \geq \omega(t + t')$$

Proposition. (ii) $\implies$ (iii)

Démonstration. Supposons ω sous-additif. Soient $t, t' \geq 0$. Supposons sans perte de généralité que $t \geq t'$. On a, par sous-additivité,

$$\omega(t) \leq \omega(t') + \omega(t - t')$$

ou encore

$$\omega(t) - \omega(t') \leq \omega(t - t')$$

Comme ω est croissant, cette inégalité s'écrit aussi

$$|\omega(t) - \omega(t')| \leq \omega(|t - t'|)$$

Ainsi, la fonction ω possède un module de continuité (elle-même), elle est donc uniformément continue.

Proposition. (iii) $\implies$ (iv)

Démonstration. Cette propriété est un cas particulier d'une propriété évoquée au début de l'article, mais refaisons la preuve. Supposons ω uniformément continu. Par la définition de la continuité uniforme, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $t, t' \geq 0$,

$$|t - t'| \leq \alpha \implies |\omega(t) - \omega(t')| \leq 1$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha \leq t < (n+1)\alpha$. On a

$$\omega(t) - \omega(0) = \omega(t) - \omega(n\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} (\omega(k+1)\alpha) - \omega(k\alpha))$$

Par choix de α et n , tous les termes ci-dessus sont inférieurs ou égaux à 1. Ainsi,

$$\omega(t) - \omega(0) \leq n + 1 \leq \frac{1}{\alpha}t + 1$$

Ainsi,

$$\omega(t) \leq at + b$$

où $a = \frac{1}{\alpha}$ et $b = \omega(0) + 1 = 1$.

Proposition. (iv) $\implies$ (v)

Démonstration. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \geq 0$ on ait $\omega(t) \leq at + b$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, soit

$$E_k = \{\omega(t) - kt, t \in \mathbb{R}_+\}$$

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels k pour lesquels E_k est majoré. L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide, il contient le réel a . Pour tout $k \in \mathcal{D}$, posons

$$\omega^*(k) = \sup E_k$$