

Les ouverts fermés d'un espace vectoriel normé

Marc Lorenzi

24 juin 2023

E désigne un espace vectoriel réel, muni d'une norme $\| \cdot \|$.

Proposition 1. *E n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides.*

Démonstration. Supposons $E = A \cup B$ où A et B sont ouverts, non vides et disjoints. L'ensemble $B = E \setminus A$ est le complémentaire de l'ouvert A , donc B est fermé. De même, A est fermé.

Soient $a \in A$ et $b \in B$. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $u_t = (1 - t)a + tb$. Notons

$$S = \{t \in [0, 1] : u_t \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

On a $u_0 = a \in A$, donc $0 \in S$. Ainsi, $S \neq \emptyset$. De plus, S est majoré par 1 donc $\theta = \sup S$ existe et $\theta \in [0, 1]$.

Comme $\theta = \sup S$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S qui converge vers θ . La suite $(u_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A converge alors vers u_θ . Comme A est fermé, $u_\theta \in A$.

On a $u_1 = b \in B$. Comme B est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x - b\| \leq \alpha$ implique $x \in B$. Soit $t \in [0, 1]$ tel que $1 - t \leq \varepsilon = \alpha/\|b - a\|$. On a alors

$$\|u_t - b\| = (1 - t)\|b - a\| \leq \alpha$$

et donc $u_t \in B$. Ainsi, pour tout $t \in S$, $t \leq 1 - \varepsilon$ et donc $\theta \leq 1 - \varepsilon < 1$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\theta + \frac{1}{n_0} \leq 1$. La suite $(\theta + \frac{1}{n})_{n \geq n_0}$ est une suite de réels de $[0, 1]$ qui n'appartiennent pas à S , donc la suite $(u_{\theta + \frac{1}{n}})_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments de B . Cette suite converge vers u_θ . Comme B est fermé, $u_\theta \in B$.

Ainsi, $u_\theta \in A \cap B$, contradiction puisque $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Corollaire 2. *Les seules parties de E ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E .*

Démonstration. Soit A un ouvert fermé de E . Comme A est fermé, l'ensemble $B = E \setminus A$ est ouvert. E est ainsi la réunion des deux ouverts disjoints A et B . Par la proposition précédente, l'un des deux ensembles A et B est vide. Si A n'est pas vide, alors B est vide, donc $A = E \setminus B = E$. $\square$