

π est irrationnel

Marc Lorenzi

13 août 2026

Résumé

Il existe de nombreuses preuves de l'irrationalité de π . La preuve ci-dessous est due à Ivan Niven (1947). Elle a l'avantage de n'utiliser que des notions relativement élémentaires.

On suppose que π est rationnel. On pose $\pi = a/b$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n \geq 2$, soient

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

et

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$$

Proposition 1. En posant $\mu = a^2/4b$, on a

$$0 < I_n \leq 2 \frac{\mu^n}{n!}$$

Démonstration. Étudions les variations de P_n sur $[0, \pi]$. En tant que polynôme, P_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= \frac{1}{n!} (nX^{n-1}(a - bX)^n - nbX^n(a - bX)^{n-1}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}(a - bX)^{n-1}(a - 2bX) \end{aligned}$$

La dérivée de P_n s'annule en 0, $a/b = \pi$ et $a/2b = \pi/2$. Sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, $P'_n > 0$ donc P_n est strictement croissant sur $[0, \pi/2]$. De même, P_n décroît strictement sur $[\pi/2, \pi]$. Le polynôme P_n a ainsi un maximum en $\pi/2$. Ce maximum est égal à

$$P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{2b}\right)^n \left(\frac{a}{2}\right)^n = \frac{1}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n = \frac{\mu^n}{n!}$$

Par la croissance de l'intégrale, on a donc

$$I_n \leq P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^\pi \sin x \, dx = 2P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \frac{\mu^n}{n!}$$

Remarquons également que la fonction $x \mapsto P_n(x) \sin x$ est continue sur $[0, \pi/2]$, positive, et n'est pas identiquement nulle. Par le théorème de nullité de l'intégrale, on a donc $I_n > 0$. $\square$

La figure ci-dessous représente la courbe de P_4 . On a pris $a = 22$ et $b = 7$ (bien que tout le monde soit conscient, à part Archimède, que $\pi \neq 22/7$).

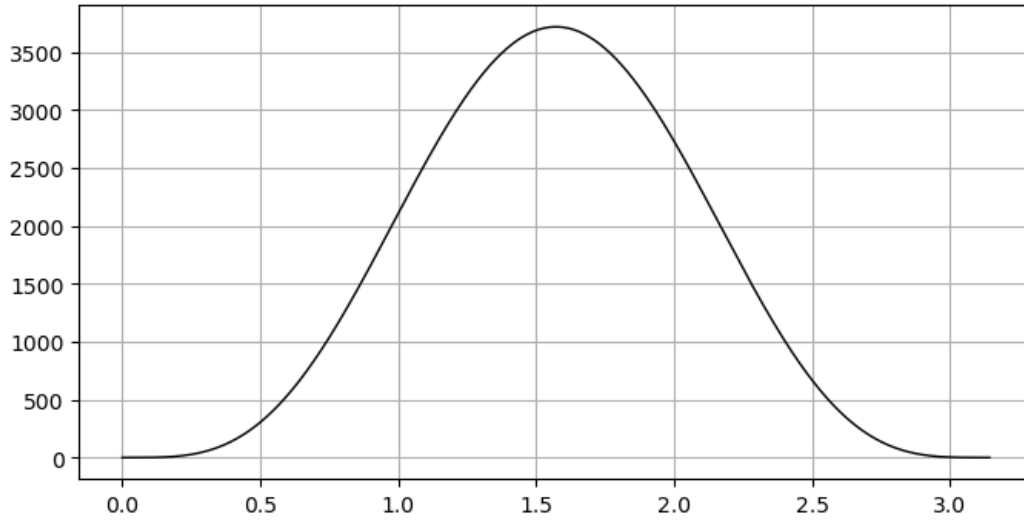


FIGURE 1 – Le polynôme P_4 sur $[0, \pi]$

Proposition 2.

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration. Lorsque n tend vers l'infini, μ^n est négligeable devant $n!$, donc le majorant dans les inégalités de la proposition 1 tend vers 0. D'où le résultat par le théorème d'encadrement. $\square$

Proposition 3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Remarquons que 0 est racine d'ordre n de P_n . On a donc pour tout $k < n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$. Également, $\deg P_n = 2n$, donc pour tout $k > 2n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$. Il reste le cas intéressant. Par la formule du binôme,

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j b^j a^{n-j} X^{n+j}$$

Le changement d'indice $k = n + j$ nous permet d'écrire

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n} b^{k-n} a^{2n-k} X^k = \sum_{k=n}^{2n} c_k X^k$$

Par la formule de Taylor, pour tout $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$,

$$P_n^{(k)}(0) = k!c_k = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n} b^{k-n} a^{2n-k}$$

Comme $k \geq n$, $k!/n!$ est un entier naturel. Les coefficients binomiaux, a et b sont aussi des entiers, et donc $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 4. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a

$$P_n(\pi - X) = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - X \right)^n \left(a - b \left(\frac{a}{b} - X \right) \right)^n = P_n(X)$$

Par une récurrence immédiate, on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_n^{(k)}(\pi - X) = (-1)^k P_n^{(k)}(X)$$

En particulier,

$$P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Considérons maintenant le polynôme

$$F_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}$$

Soit $G_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G_n(x) = F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x$$

Proposition 5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$G_n'(x) = P_n(x) \sin x$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} G_n'(x) &= (F_n''(x) \sin x + F_n'(x) \cos x) - (F_n'(x) \cos x - F_n(x) \sin x) \\ &= (F_n''(x) + F_n(x)) \sin x \end{aligned}$$

Par ailleurs, par télescopage,

$$\begin{aligned} F_n'' + F_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k P_n^{(2k+2)} + \sum_{k=0}^n (-1)^k P_n^{(2k)} \\ &= (-1)^n P_n^{(2n+2)} + P_n \end{aligned}$$

Comme P_n est de degré $2n$, $P_n^{(2n+2)} = 0$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 6. $I_n = F_n(0) + F_n(\pi)$.

Démonstration. Par la proposition 5,

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx = \int_0^\pi G'_n(x) \, dx = G_n(\pi) - G_n(0)$$

Or, $G_n(\pi) = F_n(\pi)$ et $G_n(0) = -F_n(0)$. $\square$

Corollaire 7. $I_n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Par les propositions 3 et 4, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$. De là,

$$F_n(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

De même, $F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, en utilisant le corollaire 6, $I_n = F_n(0) + F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$. Il reste à remarquer (proposition 1) que $I_n > 0$, et donc $I_n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Théorème 8. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Par la proposition 2, lorsque n tend vers l'infini, I_n tend vers 0. Pour tout n assez grand, on a donc $I_n \in [-1/2, 1/2]$. Mais par le corollaire 7, $I_n \in \mathbb{N}^*$. Contradiction. $\square$

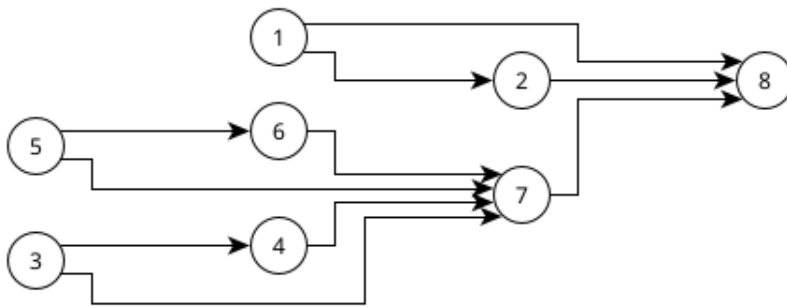


FIGURE 2 – Les dépendances entre les propositions. Une flèche du nœud a vers le nœud b indique que la proposition b utilise la proposition a .