

Un prolongement à $\mathbb{R}$ de la suite de Fibonacci

Marc Lorenzi

26 octobre 2025

La *suite de Fibonacci* est la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

Notons φ le nombre d'or. On montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Comme $(-1)^n = \cos n\pi$, on peut encore écrire

$$F_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n} \cos n\pi}{\sqrt{5}}$$

L'avantage de cette forme est qu'elle peut être prolongée à $\mathbb{R}$. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{\varphi^x - \varphi^{-x} \cos \pi x}{\sqrt{5}}$$

Proposition 0.0.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x+2) = F(x) + F(x+1)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sqrt{5}(F(x) + F(x+1)) = \varphi^x - \varphi^{-x} \cos \pi x + \varphi^{x+1} - \varphi^{-x-1} \cos \pi(x+1)$$

Or,

$$\varphi^x + \varphi^{x+1} = \varphi^x(1 + \varphi) = \varphi^x \varphi^2 = \varphi^{x+2}$$

De même,

$$\begin{aligned} \varphi^{-x} \cos \pi x + \varphi^{-x-1} \cos \pi(x+1) &= \cos \pi x (\varphi^{-x} - \varphi^{-x-1}) \\ &= \varphi^{-x} \cos \pi x (1 - \varphi^{-1}) \\ &= \varphi^{-x} \varphi^{-2} \cos \pi x \\ &= \varphi^{-x-2} \cos \pi(x+2) \end{aligned}$$

De là,

$$\sqrt{5}(F(x) + F(x+1)) = \varphi^{x+2} - \varphi^{-x-2} \cos \pi(x+2) = \sqrt{5}F(x+2)$$

□

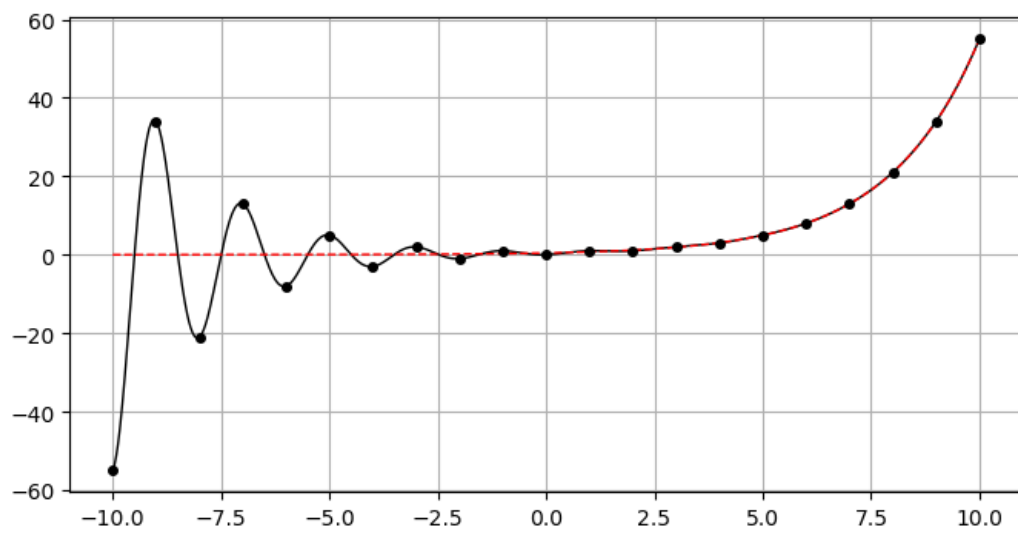


FIGURE 1 – La fonction F . En rouge, la fonction $x \mapsto \varphi^x / \sqrt{5}$