

$\mathbb{Q}$ -normes

Marc Lorenzi

24 février 2022

1 Notion de $\mathbb{Q}$ -norme

1.1 Qu'est-ce qu'une $\mathbb{Q}$ -norme ?

Définition 1. Une $\mathbb{Q}$ -norme sur $\mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{N} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant

- $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(x) \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(x) = 0 \implies x = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Les deux différences essentielles entre une $\mathbb{Q}$ -norme et une « vraie » norme sont les suivantes :

- Une $\mathbb{Q}$ norme est à valeurs dans $\mathbb{Q}$, ce qui est extrêmement restrictif.
- La propriété d'homogénéité $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ n'est vraie que pour $\lambda \in \mathbb{Q}$. En particulier, pour x, y réels quelconques, on ne sait rien de $\mathcal{N}(xy)$.

1.2 Existence de $\mathbb{Q}$ -normes

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. C'est ce que l'on appelle une *base de Hamel* de $\mathbb{R}$. Les e_i sont des réels, et tout réel x s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i \in I} a_i e_i$$

où les a_i sont des rationnels presque tous nuls. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\mathcal{N}_1(x) = \sum_{i \in I} |a_i|$$

Proposition 1. $\mathcal{N}_1$ est une $\mathbb{Q}$ -norme.

Démonstration. Dans ce qui suit, $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} b_i e_i$ désignent deux réels. Les a_i et les b_i sont des rationnels presque tous nuls.

- Clairement, $\mathcal{N}_1$ est à valeurs rationnelles positives ou nulles.

- Supposons $\mathcal{N}_1(x) = 0$. On a donc $\sum_{i \in I} |a_i| = 0$, ce qui entraîne que tous les a_i sont nuls. Ainsi, $x = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$. On a

$$\lambda x = \sum_{i \in I} (\lambda a_i) e_i$$

et donc

$$\mathcal{N}_1(\lambda x) = \sum_{i \in I} |\lambda a_i| = |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| = |\lambda| \mathcal{N}_1(x)$$

- Enfin,

$$x + y = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) e_i$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x + y) &= \sum_{i \in I} |a_i + b_i| \\ &\leq \sum_{i \in I} (|a_i| + |b_i|) \\ &= \sum_{i \in I} |a_i| + \sum_{i \in I} |b_i| \\ &= \mathcal{N}_1(x) + \mathcal{N}_1(y) \end{aligned}$$

□

Exercice. Montrer que l'application $\mathcal{N}_\infty$ définie par

$$\mathcal{N}_\infty \left(\sum_{i \in I} a_i e_i \right) = \max\{|a_i| : i \in I\}$$

est une $\mathbb{Q}$ -norme.

1.3 Quelques mises au point

Soit $\mathcal{N}$ une $\mathbb{Q}$ -norme. Soit $a = \mathcal{N}(1)$. Comme $1 \neq 0$, on a $a \neq 0$. Remarquons que $\mathcal{N}' = \frac{1}{a}\mathcal{N}$ est encore une $\mathbb{Q}$ -norme, et que de plus $\mathcal{N}'(1) = 1$.

Jusqu'à la fin de cet article, nous supposons donnée une $\mathbb{Q}$ -norme $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{N}(1) = 1$.

Remarquons le résultat suivant, qui relie la $\mathbb{Q}$ -norme $\mathcal{N}$ à la valeur absolue.

Proposition 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(x) = |x|$ si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x \in \mathbb{Q}$. On a

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x \times 1) = |x| \mathcal{N}(1) = |x|$$

Inversement, supposons $\mathcal{N}(x) = |x|$. Comme $\mathcal{N}(x) \in \mathbb{Q}$, on a donc $|x| \in \mathbb{Q}$, d'où $x \in \mathbb{Q}$. □

1.4 Deux notions de convergence

Nous disposons de la notion de convergence dans $\mathbb{R}$ au sens de la $\mathbb{Q}$ -norme $\mathcal{N}$, que nous appellerons la $\mathcal{N}$ -convergence.

Définition 2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{N}$ -converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mathcal{N}(x_n - \ell) \leq \varepsilon$$

Nous possédons aussi sur $\mathbb{R}$ la notion usuelle de convergence des suites de réels. Nous appellerons cette dernière notion la $\mathbb{R}$ -convergence.

Définition 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$ -converge vers x lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarquer simplement le fait de prendre ε rationnel. Ceci ne change rien à la définition usuelle de la convergence des suites de réels, parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Le lien entre les deux notions est le suivant :

Proposition 3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{N}$ -converge vers ℓ si et seulement si la suite $(\mathcal{N}(x_n - \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}$ -converge vers 0.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition. $\square$

Remarquons également :

Proposition 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que x_n $\mathcal{N}$ -converge vers ℓ . Alors $\mathcal{N}(x_n)$ $\mathbb{R}$ -converge vers $\mathcal{N}(\ell)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par l'inégalité triangulaire,

$$|\mathcal{N}(x_n) - \mathcal{N}(\ell)| \leq \mathcal{N}(x_n - \ell)$$

d'où, facilement, la conclusion. $\square$

Tout comme les notions de $\mathcal{N}$ -convergence et de $\mathbb{R}$ -convergence, nous disposons des notions de suite $\mathcal{N}$ -Cauchy et de suite $\mathbb{R}$ -Cauchy, de suite $\mathcal{N}$ -bornée et de suite $\mathbb{R}$ -bornée, etc. Notons :

Proposition 5. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\mathcal{N}$ -Cauchy si et seulement si elle est $\mathbb{R}$ -Cauchy.

Démonstration. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{N}(x_m - x_n) = |x_m - x_n|$$

La conclusion en découle. $\square$

Remarque. Il est essentiel que les x_n soient des rationnels, sinon, l'égalité ci-dessus est fausse.

1.5 $\mathbb{R}$ -convergence et $\mathcal{N}$ -convergence

Considérons la suite de terme général

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

C'est une suite de rationnels, qui $\mathbb{R}$ -converge vers e . Par contre, $\mathcal{N}(x_n) = x_n$ ne converge pas vers un rationnel. Par la proposition 4, cette suite est donc $\mathcal{N}$ -divergente. Ainsi,

La $\mathbb{R}$ -convergence n'entraîne pas la $\mathcal{N}$ -convergence.

Posons-nous la question inverse. Si une suite est $\mathcal{N}$ -convergente, est-elle aussi $\mathbb{R}$ -convergente? Nous allons voir sur deux exemples que ceci dépend de la norme $\mathcal{N}$.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. En multipliant les e_n par des rationnels non nuls convenables (ce qui ne modifie pas la liberté de la famille), on peut également supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq e_n$.

Par le théorème de la base incomplète, cette famille peut être complétée en une base de Hamel $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{N}_1$ la norme associée à $\mathcal{B}$, définie par

$$\mathcal{N}_1\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) = \sum_{i \in I} |a_i|$$

où les a_i sont des rationnels presque tous nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = \frac{1}{n} e_n$. On a alors

$$\mathcal{N}_1(x_n) = \frac{1}{n}$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ $\mathcal{N}_1$ -converge vers 0. En revanche,

$$x_n = \frac{1}{n} e_n \geq \frac{1}{n} n^2 = n$$

et donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ $\mathbb{R}$ -diverge. Plus précisément, elle tend vers $+\infty$. Ainsi,

Pour cette base $\mathcal{B}$, la $\mathcal{N}_1$ -convergence n'entraîne pas la $\mathbb{R}$ -convergence.

Prenons maintenant une base de Hamel $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ en choisissant les e_i de sorte que pour tout $i \in I$, $0 < e_i \leq 1$. Pour cela, il suffit de prendre une base de Hamel quelconque de $\mathbb{R}$ et de multiplier ses vecteurs par des rationnels non nuls

convenables. Appelons $\mathcal{N}_1$ la norme 1 associée à $\mathcal{B}$. Pour tout $x = \sum_{i \in I} a_i e_i \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| = \left| \sum_{i \in I} a_i e_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i| = \mathcal{N}_1(x)$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $\mathcal{N}_1$ -convergente vers un réel ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\mathcal{N}_1(x_n - \ell) \leq \varepsilon$. De là, pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - \ell| \leq \mathcal{N}_1(x_n - \ell) \leq \varepsilon$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\mathbb{R}$ -convergente vers ℓ . En conclusion,

Pour cette base $\mathcal{B}$, la $\mathcal{N}_1$ -convergence entraîne la $\mathbb{R}$ -convergence vers la même limite.

Posons-nous une dernière question. Est-il possible de trouver une $\mathbb{Q}$ -norme $\mathcal{N}$ et une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la suite $\mathcal{N}$ -converge et $\mathbb{R}$ -converge, *mais vers des réels différents*? La réponse est oui.

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une famille libre du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. On peut, quitte à multiplier les e_n par des rationnels judicieux, supposer que $e_n \sim n$ lorsque n tend vers l'infini. Pour un exemple concret, voir l'annexe à la fin de l'article. On complète cette famille en une base de Hamel $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$. Prenons ensuite la norme $\mathcal{N}_1$ associée à $\mathcal{B}$. Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}e_n$. On a

$$\mathcal{N}_1(x_n) = \frac{1}{n}$$

et donc x_n $\mathcal{N}_1$ -converge vers 0. En revanche,

$$x_n = \frac{1}{n}e_n \sim 1$$

et donc x_n $\mathbb{R}$ -converge vers 1.

2 Deux non-propriétés des $\mathbb{Q}$ -normes

2.1 Non-complétude de $\mathbb{R}$

Proposition 6. $\mathbb{R}$ n'est pas $\mathcal{N}$ -complet.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par la densité « standard » de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de rationnels qui $\mathbb{R}$ -converge vers x . La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ étant $\mathbb{R}$ -convergente, elle est $\mathbb{R}$ -Cauchy donc elle est aussi $\mathcal{N}$ -Cauchy. Supposons un court instant que cette suite $\mathcal{N}$ -converge vers un réel y . Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathcal{N}(x_n) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x_n - y)$$

Ainsi, la suite de terme général $\mathcal{N}(x_n) = |x_n|$ est $\mathbb{R}$ -convergente vers $\mathcal{N}(y) \in \mathbb{Q}$ lorsque n tend vers l'infini. Cependant, puisque x_n $\mathbb{R}$ -converge vers x , la suite de terme général $|x_n|$ est $\mathbb{R}$ -convergente vers $|x| \notin \mathbb{Q}$, contradiction. Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ $\mathcal{N}$ -diverge. $\square$

2.2 Non-densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 7. $\mathbb{Q}$ est $\mathcal{N}$ -fermé.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x est la $\mathcal{N}$ -limite d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de rationnels. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ étant $\mathcal{N}$ -convergente, elle est donc $\mathcal{N}$ -Cauchy. Elle est donc aussi $\mathbb{R}$ -Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ -complet, cette suite $\mathbb{R}$ -converge vers un réel y . De là, le suite de terme général $|x_n|$ est $\mathbb{R}$ -convergente vers $|y|$. Remarquons que la suite de terme général $\mathcal{N}(x_n)$ est $\mathbb{R}$ -convergente vers $\mathcal{N}(x)$. Par l'unicité de la limite, il vient $|y| = \mathcal{N}(x) \in \mathbb{Q}$ et donc $y \in \mathbb{Q}$. De là, $|x_n - y|$ $\mathbb{Q}$ -converge vers 0. Mais comme x_n et y sont rationnels, $|x_n - y| = \mathcal{N}(x_n - y)$. Ainsi, x_n $\mathcal{N}$ -converge vers y . Par unicité de la limite, $x = y \in \mathbb{Q}$. $\square$

Corollaire 8. $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathcal{N}$ -dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, si une suite de rationnels $\mathcal{N}$ -converge, sa limite est rationnelle. $\square$

3 Annexe

Nous allons dans cette annexe construire explicitement une famille libre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons p_n le n ième nombre premier. Posons $e_n = \ln p_n$. Supposons

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n e_n = 0$$

où les a_n sont rationnels et presque tous nuls. Quitte à multiplier par le produit des dénominateurs des a_n (ces dénominateurs sont presque tous égaux à 1), on peut même supposer les a_n entiers. On a, par les propriétés de morphisme du logarithme,

$$\ln \prod_{n \in \mathbb{N}^*} p_n^{a_n} = 0$$

et donc

$$\prod_{n \in \mathbb{N}^*} p_n^{a_n} = 1$$

Notons

$$J = \{n \in \mathbb{N}^* : a_n < 0\}$$

et $I = \mathbb{N}^* \setminus J$. Pour tout $n \in J$, notons $b_n = -a_n$. On a

$$\prod_{n \in I} p_n^{a_n} = \prod_{n \in J} p_n^{b_n}$$

Les p_n sont distincts deux à deux, et $I \cap J = \emptyset$. Ceci entraîne, par l'unicité de la décomposition des entiers en produit de nombres premiers, que les a_n et les b_n sont nuls. Ainsi, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Proposition 9. $p_n \sim n \ln n$.

Démonstration. Nous faisons en fait semblant de faire une démonstration, parce que nous allons utiliser le *théorème des nombres premiers*, qui est hautement non trivial. Ce théorème nous dit la chose suivante. Pour tout réel $x > 0$, notons

$$\pi(x) = \text{Card}\{k \in \mathbb{N}^* : p_k \leq x\}$$

Alors, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Remarquons l'égalité évidente $\pi(p_n) = n$. On a donc, par le théorème des nombres premiers,

$$n \sim \frac{p_n}{\ln p_n}$$

et donc

$$(1) \quad p_n \sim n \ln p_n$$

Prenons le logarithme de cet équivalent, opération licite car nos suites tendent vers l'infini. Il vient

$$\ln p_n \sim \ln n + \ln \ln p_n = \ln n + o(\ln p_n)$$

Ainsi,

$$\ln n + o(\ln p_n) = \ln p_n + o(\ln p_n)$$

d'où

$$\ln n \sim \ln p_n$$

En reportant dans (1), on obtient

$$p_n \sim n \ln n$$

□

Il résulte de la proposition précédente que

$$e_n = \ln p_n \sim \ln n$$

Reprenons l'exemple que nous avons vu plus haut. Nous imposons $e_n \sim n$ et promettons un exemple concret. Considérons, pour tout $n \geq 1$,

$$e'_n = \frac{n}{[\ln n] + 1} e_n$$

où les crochets représentent la partie entière. Les e'_n , multiples rationnels non nuls des e_n , sont libres dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. De plus,

$$e'_n \sim \frac{n}{\ln n} \ln n = n$$

La famille $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait donc les conditions voulues.