

$$\sqrt{x}$$

Marc Lorenzi

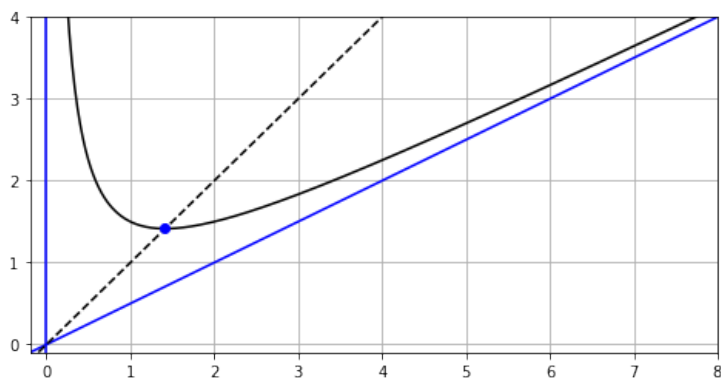
2 octobre 2022

On se donne un réel $a > 1$. Nous allons étudier une suite qui converge vers $\sqrt{a}$. La condition $a > 1$ permet d'éviter des discussions dans nos démonstrations. Elle n'est pas vraiment restrictive, car si $0 < a < 1$, il suffit d'appliquer ce que nous allons voir à $\frac{1}{a}$, puis d'inverser le résultat, pour obtenir $\sqrt{a}$.

Définition 1. La suite u est définie par récurrence par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}$$

Voici le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{2x}$. La fonction f a un minimum en $\sqrt{2}$, où elle prend la valeur $\sqrt{2}$. La courbe a pour asymptotes la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$. En pointillés, la droite d'équation $y = x$. Elle coupe le graphe de la fonction au point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Démonstration. C'est une récurrence immédiate sur n . $\square$

Proposition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a} \\&= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}\end{aligned}$$

□

Proposition 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{a}$.*

Démonstration. Prouvons-le par récurrence sur n . On a $u_0 = a > \sqrt{a}$, car $a > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > \sqrt{a}$. Par la proposition 2,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} > 0$$

□

Proposition 4. *La suite u est strictement décroissante.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - u_n \\&= \frac{a - u_n^2}{2u_n}\end{aligned}$$

Comme $u_n > \sqrt{a}$, on a $u_n^2 > a$, et donc $u_{n+1} - u_n < 0$. □

Proposition 5. *La suite u converge vers $\sqrt{a}$.*

Démonstration. La suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq \sqrt{a}$. Passons à la limite dans la relation de récurrence qui définit u . Il vient

$$\ell = \frac{\ell^2 + a}{2\ell}$$

d'où $\ell^2 = a$ et donc $\ell = \sqrt{a}$ puisque $\ell \geq 0$. □

Définition 2.

$$k = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = u_n - \sqrt{a}$$

Proposition 6. *Pour tous $n, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 \leq n$,*

$$0 < \delta_n \leq \frac{1}{k} (k\delta_{n_0})^{2^{n-n_0}}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que $0 < \delta_n$. De plus, par la proposition 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{\delta_n^2}{2u_n}$$

Comme $u_n > \sqrt{a}$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{n+1} \leq \frac{\delta_n^2}{2\sqrt{a}} = k\delta_n^2$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq n_0$,

$$\delta_n \leq \frac{1}{k} (k\delta_{n_0})^{2^{n-n_0}}$$

C'est évident pour $n = n_0$. Soit $n \geq n_0$. Supposons l'inégalité vérifiée pour n . On a alors

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &\leq k\delta_n^2 \\ &\leq k \left(\frac{1}{k} (k\delta_{n_0})^{2^{n-n_0}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{k} (k\delta_{n_0})^{2^{n+1-n_0}} \end{aligned}$$

□

Cette inégalité n'est intéressante que si $k\delta_{n_0} < 1$. En voici une autre, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{\delta_0}{2^n}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \delta_n \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n} \\ &= \delta_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2u_n} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \delta_n \end{aligned}$$

De là, par une récurrence immédiate,

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{\delta_0}{2^n}$$

□

Proposition 8. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\delta_n \leq \varepsilon$ dès que

$$n \geq \lg(\sqrt{a} - 1) + \lg \lg \frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon}$$

Démonstration. Par la proposition précédente, on a $k\delta_{n_0} \leq \frac{1}{2}$ dès que

$$k \frac{\delta_0}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2}$$

Rappelons-nous que $k = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. L'inégalité ci-dessus équivaut donc à

$$\frac{\delta_0}{2^{n_0}} \leq \sqrt{a}$$

ou encore

$$2^{n_0} \geq \frac{\delta_0}{\sqrt{a}} = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} - 1$$

c'est à dire

$$n_0 \geq \lg(\sqrt{a} - 1)$$

Prenons un tel entier n_0 . Pour tout $n \geq n_0$, on a alors

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{k} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}} = \frac{2\sqrt{a}}{2^{2^{n-n_0}}}$$

On a donc $\delta_n \leq \varepsilon$ dès que

$$\frac{2\sqrt{a}}{2^{2^{n-n_0}}} \leq \varepsilon$$

c'est à dire

$$2^{2^{n-n_0}} \geq \frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon}$$

ou encore

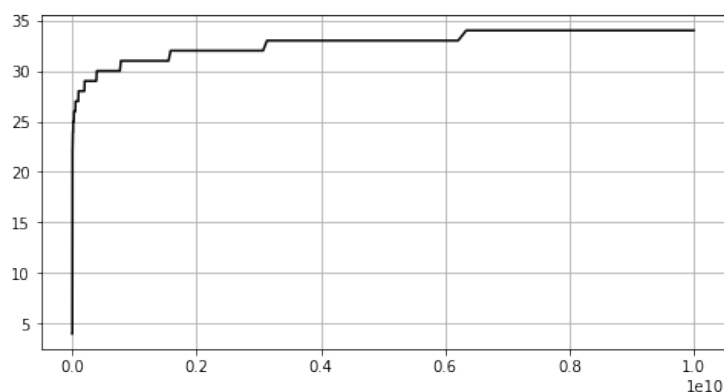
$$n \geq n_0 + \lg \lg \frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon}$$

□

Si nous prenons, dans l'inégalité ci-dessus, $\varepsilon = 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$n \geq n_0 + \lg(\lg(2\sqrt{a}) + p \lg 10)$$

Dans le graphique ci-dessous on a pris $a = 2$. Le graphique représente, pour $p \leq 10^{10}$, un entier n tel que $\delta_n \leq 10^{-p}$. Pour obtenir $\sqrt{2}$ avec 10 milliards de chiffres exacts, il suffit de 35 itérations.



Voici les 1000 premières décimales de $\sqrt{2}$, obtenues en 12 itérations.

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324
784621070388503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441
214970999358314132226659275055927557999505011527820605714701095599716059
702745345968620147285174186408891986095523292304843087143214508397626036
279952514079896872533965463318088296406206152583523950547457502877599617
298355752203375318570113543746034084988471603868999706990048150305440277
903164542478230684929369186215805784631115966687130130156185689872372352
885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677
653720226485447015858801620758474922657226002085584466521458398893944370
926591800311388246468157082630100594858704003186480342194897278290641045
072636881313739855256117322040245091227700226941127573627280495738108967
504018369868368450725799364729060762996941380475654823728997180326802474
420629269124859052181004459842150591120249441341728531478105803603371077
30918286931471017111168391658172688941975871658215212822951848847