

Racines itérées

Marc Lorenzi

9 septembre 2026

1 Introduction

1.1 Racines itérées

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous réels positifs ou nuls $a_0, \dots, a_n$, on définit le réel $[a_0, \dots, a_n]$. Tout d'abord, $[a_0] = \sqrt{a_0}$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[a_0, \dots, a_n] = \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n]}$$

De façon informelle,

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}}$$

De nombreuses variantes sont possibles mais nous allons nous concentrer sur cette définition.

1.2 Un exemple très simple

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_n \in \mathbb{R}_+$,*

$$[0, \dots, 0, a_n] = a_n^{2^{-n-1}}$$

où le membre de gauche contient n zéros.

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Soit $a_0 \in \mathbb{R}_+$. On a

$$[a_0] = \sqrt{a_0} = a_0^{2^{-1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. Soit $a_n \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} [0, \dots, 0, a_n] &= \sqrt{0 + [0, \dots, 0, a_n]} \\ &= \sqrt{[0, \dots, 0, a_n]} \quad (n - 1 \text{ zéros}) \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \sqrt{a_n^{2^{-n}}} \\ &= a_n^{2^{-n-1}} \end{aligned}$$

□

1.3 Suites constantes

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c$. Posons $r_n = [a_0, \dots, a_n]$. On a alors $r_0 = \sqrt{c}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_n = \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n]} = \sqrt{a_0 + [a_0, \dots, a_{n-1}]} = \sqrt{r_{n-1} + c}$$

Proposition 2. *La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers*

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Démonstration. Supposons que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Un passage à la limite montre que $\ell = \sqrt{\ell + c}$, et donc $\ell^2 = \ell + c$. Ainsi, ℓ est racine de l'équation de degré 2

$$(E) \quad x^2 - x - c = 0$$

L'équation (E) a deux racines réelles

$$x' = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Remarquons que $x'' < 0 < x'$ et donc, comme $\ell \in \mathbb{R}_+$, $\ell = x'$.

Montrons maintenant que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$r_n - \ell = \sqrt{r_{n-1} + c} - \sqrt{\ell + c} = \frac{r_{n-1} - \ell}{\sqrt{r_{n-1} + c} + \sqrt{\ell + c}}$$

Le signe de $r_n - \ell$ est ainsi constant. Or,

$$\begin{aligned} r_0 - \ell &= \sqrt{c} - \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2\sqrt{c} - 1 - \sqrt{1 + 4c}) \\ &\leq \frac{1}{2}(2\sqrt{c} - 1 - \sqrt{4c}) \\ &= -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq \ell$. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} r_n - r_{n-1} &= \sqrt{r_{n-1} + c} - r_{n-1} \\ &= \frac{r_{n-1} + c - r_{n-1}^2}{\sqrt{r_{n-1} + c} + r_{n-1}} \\ &= -\frac{(r_{n-1} - x')(r_{n-1} - x'')}{\sqrt{r_{n-1} + c} + r_{n-1}} \\ &= -\frac{(r_{n-1} - \ell)(r_{n-1} - x'')}{\sqrt{r_{n-1} + c} + r_{n-1}} \geq 0 \end{aligned}$$

La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge. Or, si elle converge, c'est vers ℓ .
 $\square$

Informellement, nous avons montré que pour tout $c > 0$,

$$\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots}}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

En particulier,

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 2$$

Pour $c = 1$, on obtient le nombre d'or :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Remarque. Si nous prenons $c = 0$, la suite des racines itérées est la suite nulle, elle tend donc vers 0. Cependant,

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \times 0}}{2} = 1 \neq 0$$

Nous avons donc en 0 un phénomène de discontinuité.

1.4 Quelques propriétés faciles

Posons $(a_0, \dots, a_n) \preceq (b_0, \dots, b_n)$ si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \leq b_k$. La relation $\preceq$ est un ordre partiel sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, $(a_0, \dots, a_n) \preceq (b_0, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_0 \leq b_0$ et $(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n)$.

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : (\mathbb{R}_+^{n+1}, \preceq) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \leq)$ définie par

$$f(a_0, \dots, a_n) = [a_0, \dots, a_n]$$

est croissante.

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . C'est immédiat pour $n = 0$: si $a_0 \leq b_0$, alors

$$[a_0] = \sqrt{a_0} \leq \sqrt{b_0} = [b_0]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. Soient $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Supposons que $(a_0, \dots, a_n) \preceq (b_0, \dots, b_n)$. On a alors

$$[a_0, \dots, a_n] = \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n]} \leq \sqrt{b_0 + [b_1, \dots, b_n]} = [b_0, \dots, b_n]$$

$\square$

Lemme 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$,

$$[a_0, \dots, a_n, 0] = [a_0, \dots, a_n]$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Soit $a_0 \in \mathbb{R}_+$. On a

$$[a_0, 0] = \sqrt{a_0 + [0]} = \sqrt{a_0} = [a_0]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$[a_1, \dots, a_n, 0] = [a_1, \dots, a_n]$$

De là,

$$[a_0, \dots, a_n, 0] = \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n, 0]} = \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n]} = [a_0, \dots, a_n]$$

□

Proposition 5. Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls, la suite $([a_0, \dots, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la proposition 3 et le lemme 4,

$$[a_0, \dots, a_{n+1}] \geq [a_0, \dots, a_n, 0] = [a_0, \dots, a_n]$$

□

La proposition suivante exprime une propriété « d'homogénéité » des racines itérées.

Proposition 6. Soit $M > 0$. On a pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ et tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$,

$$[M^{2^k} a_0, \dots, M^{2^{k+n}} a_n] = M^{2^{k-1}} [a_0, \dots, a_n]$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur n . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $a_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$[M^{2^k} a_0] = \sqrt{M^{2^k} a_0} = M^{2^{k-1}} \sqrt{a_0} = M^{2^{k-1}} [a_0]$$

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. On a

$$[M^{2^k} a_0, \dots, M^{2^{k+n}} a_n] = \sqrt{M^{2^k} a_0 + [M^{2^{k+1}} a_1, \dots, M^{2^{k+n}} a_n]}$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$[M^{2^{k+1}} a_1, \dots, M^{2^{k+n}} a_{n+1}] = M^{2^k} [a_1, \dots, a_n]$$

De là,

$$\begin{aligned} [M^{2^k} a_0, \dots, M^{2^{k+n}} a_n] &= \sqrt{M^{2^k} a_0 + M^{2^k} [a_1, \dots, a_n]} \\ &= M^{2^{k-1}} \sqrt{a_0 + [a_1, \dots, a_n]} \\ &= M^{2^{k-1}} [a_0, \dots, a_n] \end{aligned}$$

□

2 La formule de Viète

Revenons au cas des suites constantes. Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2$. Posons $r_n = [a_0, \dots, a_n]$.

Proposition 7. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{r_{n-1}}{2}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . On a

$$\cos \frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r_0}{2}$$

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vérifié par $n-1$. Soit $x = \cos \pi/2^{n+1}$. On a

$$\frac{r_{n-2}}{2} = \cos \frac{\pi}{2^n} = 2x^2 - 1$$

et donc

$$x^2 = \frac{1}{4}(2 + r_{n-2})$$

d'où, comme $x > 0$,

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + r_{n-2}} = \frac{1}{2} r_{n-1}$$

□

Pour tout $n \geq 1$, posons

$$u_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Proposition 8. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$u_n = \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

Démonstration. Soit

$$v_n = u_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n &= u_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= u_{n-1} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} v_{n-1} \end{aligned}$$

De plus, $v_1 = 1/2$. De là, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{1}{2^n}$$

d'où la valeur attendue pour u_n . $\square$

Proposition 9. *Lorsque n tend vers l'infini, u_n tend vers $2/\pi$.*

Démonstration. Lorsque n tend vers l'infini,

$$u_n \sim \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

$\square$

En combinant le tout, nous obtenons

Proposition 10. [VIÈTE]

$$\frac{r_0}{2} \cdots \frac{r_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi}$$

Cette égalité est souvent écrite informellement

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots$$

3 Le théorème de Herschfeld

Nous allons dans cette section déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la suite $([a_0, \dots, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Cette condition est la suivante.

Proposition 11. [THÉORÈME DE HERSCHFELD]

La suite $([a_0, \dots, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq M^{2^n}$$

Commençons par montrer que la condition de majoration est nécessaire.

Proposition 12. *On suppose que la suite $([a_0, \dots, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Alors, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M^{2^n}$.*

Démonstration. Soit ℓ la limite de $r_n = [a_0, \dots, a_n]$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $r_n \leq \ell + 1$. Par la proposition 3 de croissance des racines itérées et la proposition 1,

$$r_n = [a_0, \dots, a_n] \geq [0, \dots, 0, a_n] = a_n^{2^{-n}}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$a_n^{2^{-n}} \leq r_n \leq \ell + 1$$

Posons

$$M = \max\{a_0^{2^{-0}}, \dots, a_{N-1}^{2^{-N+1}}, \ell + 1\}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n^{2^{-n}} \leq M$$

ou encore

$$a_n \leq M^{2^n}$$

□

Nous allons maintenant montrer que la condition de majoration est suffisante.

Proposition 13. *On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M^{2^n}$. Alors, la suite $([a_0, \dots, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[a_0, \dots, a_n] \leq [M^{2^0}, \dots, M^{2^n}] = \sqrt{M}[1, \dots, 1] \quad (n+1 \text{ fois})$$

Le crochet $[1, \dots, 1]$ est le n^e terme de la suite des racines itérées de la suite constante égale à 1. Nous avons vu que la suite des itérées est croissante et tend vers le nombre d'or φ . Ainsi,

$$[a_0, \dots, a_n] \leq \varphi \sqrt{M}$$

La suite des racines itérées de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée. Par la proposition 5, cette suite est croissante, donc elle converge. □