

Densité

Marc Lorenzi

3 novembre 2022

Résumé

Nous allons démontrer que pour presque toutes les valeurs du réel x , l'ensemble des valeurs prises par les suites $(\cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin nx)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

1 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

1.1 Sous-groupes discrets, sous-groupes denses

Proposition 1. *Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de deux types.*

- *Ceux de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+$.*
- *Les autres, qui sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ du premier type est dit *discret*.

Remarquons qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ n'est clairement pas dense dans $\mathbb{R}$. Les deux cas s'excluent donc.

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Si $G = \{0\}$, on est dans le premier cas, puisque $G = 0\mathbb{Z}$. Supposons maintenant que $G \neq \{0\}$. Soit

$$G_+^* = \{x \in G : x > 0\}$$

Soit x un élément non nul de G . Si $x < 0$ alors, comme G est stable par passage à l'opposé, on a aussi $-x \in G$. Ainsi, $G_+^* \neq \emptyset$. L'ensemble G_+^* est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, cet ensemble possède donc une borne inférieure a . Comme 0 minore G_+^* , on a $a \geq 0$.

- Cas 1, $a = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. ε ne minore pas G_+^* , il existe donc $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Posons $\varepsilon = y - x$. Soit $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. Par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$ng \leq x < (n+1)g$$

Remarquons que comme G est un groupe, $(n+1)g \in G$. De plus

$$(n+1)g = ng + g \leq x + g < x + \varepsilon = x + (y - x) = y$$

Ainsi,

$$x < (n+1)g < y$$

Le groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$.

- Cas 2, $a > 0$. Supposons un instant que $a \notin G$. On a $2a > a$. Le réel $2a$ ne minore donc pas G_+^* . Il existe donc $x \in G$ tel que $a < x < 2a$. En recommençant avec x , il existe $y \in G$ tel que

$$a < y < x < 2a$$

Remarquons maintenant que comme G est un groupe, $x - y \in G$. Or,

$$0 < x - y < a$$

ce qui contredit le fait que a est la borne inférieure de G_+^* . Ainsi, $a \in G$. De là, comme G est un groupe, $a\mathbb{Z} \subseteq G$. Inversement, soit $x \in G$. Par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$na \leq x < (n+1)a$$

Supposons un instant que $na \neq x$. On a alors

$$0 < x - na < a$$

Or, $x - na \in G$, ce qui contredit le fait que a est la borne inférieure de G_+^* . Ainsi, $x = na \in a\mathbb{Z}$.

□

1.2 Un cas particulier

Nous considérons ici les sous-groupes de $\mathbb{R}$ engendrés par deux éléments. À quelle condition un tel sous-groupe de $\mathbb{R}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Proposition 2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Soit

$$G = \{n\alpha + m\beta : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Alors, G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons que G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Par la proposition 1, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Comme $\alpha = 1\alpha + 0\beta \in G$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = pa$. De même, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = qa$. Comme $\beta \neq 0$, q et a sont non nuls. De là,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{pa}{qa} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

($\Rightarrow$) Supposons que $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$. Soit $x \in G$. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $x = n\alpha + m\beta$. On a

$$\begin{aligned} x &= n\alpha + m\beta \\ &= n\frac{p}{q}\beta + m\beta \\ &= (np + mq)\beta \end{aligned}$$

où $\gamma = \frac{\beta}{q}$. Ainsi, $G \subseteq \gamma\mathbb{Z}$, et G est donc discret.

Remarquons que si l'on a pris soin de choisir p et q premiers entre-eux, alors $G = \gamma\mathbb{Z}$. En effet, par le théorème de Bézout, il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $np + mq = 1$. De là,

$$m\alpha + n\beta = (np + mq)\gamma = \gamma \in G$$

et on a donc aussi l'inclusion $\gamma\mathbb{Z} \subseteq G$. $\square$

1.3 Une extension du résultat précédent

Nous allons dans ce paragraphe considérer des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des sous-groupes de $\mathbb{R}$. Néanmoins, ces parties conservent la propriété de densité.

Lemme 3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. Soit

$$A = \{n\alpha + m\beta : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in A$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

Démonstration. Notons $G = \{n\alpha + m\beta : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$. Par la proposition 2, G est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n_0\alpha + m_0\beta < \varepsilon$$

En utilisant le même argument, on construit par récurrence sur p deux suites $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$0 < n_{p+1}\alpha + m_{p+1}\beta < n_p\alpha + m_p\beta < \varepsilon$$

Supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n_{p+1} \leq n_p$. On a alors

$$0 < (n_p - n_{p+1})\alpha + (m_p - m_{p+1})\beta < n_p\alpha + m_p\beta < \varepsilon$$

Comme $n = n_p - n_{p+1} \in \mathbb{N}$, on a donc trouvé $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

Supposons, au contraire, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n_p < n_{p+1}$. On a alors par une récurrence immédiate $n_p > n_0 + p$. De là, pour tout p assez grand, $n_p \in \mathbb{N}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

$\square$

Lemme 4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. Soit

$$A = \{n\alpha + m\beta : n \in \mathbb{Z}_-, m \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in A$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme précédent, on construit deux suites $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$0 < n_{p+1}\alpha + m_{p+1}\beta < n_p\alpha + m_p\beta < \varepsilon$$

Supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n_p \leq n_{p+1}$. On a alors

$$0 < (n_p - n_{p+1})\alpha + (m_p - m_{p+1})\beta < n_p\alpha + m_p\beta < \varepsilon$$

Comme $n = n_p - n_{p+1} \in \mathbb{Z}_-$, on a donc trouvé $n \in \mathbb{Z}_-$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

Supposons, au contraire, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n_p > n_{p+1}$. On a alors par une récurrence immédiate $n_p < n_0 - p$. Pour tout p assez grand, $n_p \in \mathbb{Z}_-$. Il existe donc $n \in \mathbb{Z}_-$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

□

Proposition 5. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. Soit

$$A = \{n\alpha + m\beta : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$$

Alors, A est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Supposons tout d'abord $x \geq 0$. Par le lemme 3, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

Par la propriété d'Archimède, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(n\alpha + m\beta) \leq x < (p+1)(n\alpha + m\beta)$$

Notons $g = (p+1)(n\alpha + m\beta)$. On a $g \in A$, et

$$x < g = p(n\alpha + m\beta) + (n\alpha + m\beta) < x + \varepsilon$$

Ainsi, $|x - g| \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que $x < 0$. Par le lemme 4, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 < -n\alpha + m\beta < \varepsilon$$

Par la propriété d'Archimède, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(-n\alpha + m\beta) \leq -x < (p+1)(-n\alpha + m\beta)$$

En passant à l'opposé, on obtient

$$(-p-1)(-n\alpha + m\beta) < x \leq -p(-n\alpha + m\beta)$$

ou encore

$$(p+1)(n\alpha - m\beta) < x \leq p(n\alpha - m\beta)$$

Notons $g = (p+1)(n\alpha - m\beta)$. On a $g \in A$, et

$$x > g = p(n\alpha - m\beta) + (n\alpha - m\beta) > x - \varepsilon$$

Ainsi, $|x - g| \leq \varepsilon$. □

2 Images de parties denses

2.1 Image d'une partie dense de $\mathbb{R}$ par une fonction continue

Proposition 6. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur une partie D fermée de $\mathbb{R}$. Soit $A \subseteq D$. On a alors

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que comme D est fermé, $\overline{A} \subseteq D$. Ainsi, considérer $f(\overline{A})$ a bien un sens.

Soit $y \in f(\overline{A})$. Soit $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Comme x est adhérent à A , il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x . La fonction f est continue en x , donc la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$, qui est une suite d'éléments de $f(A)$, tend vers $f(x) = y$. $\square$

Remarquons que l'inclusion réciproque est en général fautive. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Prenons $A = \mathbb{R}$. On a $f(\overline{A}) = f(\mathbb{R}) =]0, 1]$. En revanche, $\overline{f(A)} = \overline{]0, 1]} = [0, 1]$.

Corollaire 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors, $f(A)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

Démonstration. Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{A} = \mathbb{R}$. Par la proposition précédente,

$$\overline{f(A)} = f(\overline{A}) = f(\mathbb{R})$$

$\square$

2.2 La suite $(\cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$

Proposition 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$E = \{\cos nx : n \in \mathbb{N}\}$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Q}$, alors E est dense dans $[-1, 1]$. Sinon, E est fini.

Démonstration. Soit

$$G = \{nx + 2m\pi : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

G est le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par x et 2π . Remarquons que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(nx + 2m\pi) = \cos nx$$

Remarquons également que si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\cos nx = \cos(-nx)$. Ainsi,

$$E = \cos G$$

($\Leftarrow$) Supposons $x \notin \pi\mathbb{Q}$. Par la proposition 2, G est dense dans $\mathbb{R}$. Par le corollaire 7 appliqué à la fonction $\cos$, $\cos G$ est dense dans $\cos \mathbb{R} = [-1, 1]$.

($\Rightarrow$) Supposons que $x \in \pi\mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{2p\pi}{q}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Effectuons la division euclidienne de n par q . Il existe $m, r \in \mathbb{Z}$ tels que $n = mq + r$, et $0 \leq r < q$. De là,

$$nx = \frac{2np\pi}{q} = 2mp\pi + \frac{2rp\pi}{q}$$

et donc

$$E = \left\{ \cos \frac{2rp\pi}{q} : r \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \right\}$$

L'ensemble E est donc fini, de cardinal inférieur ou égal à q . $\square$

2.3 La suite $(\sin nx)_{n \in \mathbb{N}}$

La suite $(\sin nx)_{n \in \mathbb{N}}$ présente une difficulté supplémentaire. La fonction $\cos$ étant paire, nous avons pu, pour étudier la suite $(\cos nx)_{n \in \mathbb{N}}$, considérer l'image d'un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ par la fonction $\cos$. En revanche, la fonction $\sin$ est impaire. Le même raisonnement que pour la fonction $\cos$ nous montrerait que si $x \notin \pi\mathbb{Q}$ l'ensemble $E = \{\sin nx : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. Nous avons heureusement à notre disposition une extension de la proposition 2, à savoir la proposition 5.

Proposition 9. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit*

$$E = \{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Q}$, alors E est dense dans $[-1, 1]$. Sinon, E est fini.

Démonstration. Soit $A = \{nx + 2m\pi : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que pour tous $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(nx + 2m\pi) = \sin nx$$

et donc $\sin A = E$.

($\Rightarrow$) Supposons que $x \notin \pi\mathbb{Q}$. Par la proposition 5, A est dense dans $\mathbb{R}$. Par le corollaire 7 appliqué à la fonction $\sin$, $\sin A$ est dense dans $\sin \mathbb{R} = [-1, 1]$.

($\Leftarrow$) Supposons que $x \in \pi\mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{2p\pi}{q}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de n par q . Il existe $m, r \in \mathbb{Z}$ tels que $n = mq + r$, et $0 \leq r < q$. De là,

$$nx = \frac{2np\pi}{q} = 2mp\pi + \frac{2rp\pi}{q}$$

et donc

$$E = \left\{ \sin \frac{2rp\pi}{q} : r \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \right\}$$

L'ensemble E est donc fini, de cardinal inférieur ou égal à q . $\square$

2.4 Une suite à termes complexes

Terminons cet article par une suite à termes complexes.

Proposition 10. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit*

$$E = \{e^{inx} : n \in \mathbb{N}\}$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Q}$, E est dense dans l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1. Sinon, E est fini.

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout réel t par $\varphi(t) = e^{it}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Soit $A = \{nx + 2m\pi : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(nx + 2m\pi) = \varphi(nx)$$

Ainsi, $E = \varphi(A)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $x \notin \pi\mathbb{Q}$. Par la proposition 5, A est dense dans $\mathbb{R}$. Par la proposition 6 appliquée à la fonction φ , $E = \varphi(A)$ est dense dans $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $x \in \pi\mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{2p\pi}{q}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de n par q . Il existe $m, r \in \mathbb{Z}$ tels que $n = mq + r$, et $0 \leq r < q$. De là,

$$nx = \frac{2np\pi}{q} = 2mp\pi + \frac{2rp\pi}{q}$$

et donc

$$E = \left\{ e^{\frac{2irp\pi}{q}} : r \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket \right\}$$

L'ensemble E est donc fini, de cardinal inférieur ou égal à q . Remarquons que

$$E \subseteq \mathcal{U}_q$$

où $\mathcal{U}_q$ est l'ensemble des racines q èmes de l'unité. $\square$