

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est sous-additive sur I si pour tous $x, y \in I$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Lemme 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-additive. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(nx) \leq nf(x)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons l'inégalité par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est clair. Soit $n \geq 1$. Supposons que $f(nx) \leq nf(x)$. On a alors

$$f(n+1)x = f(nx + x) \leq f(nx) + f(x) \leq_{(HR)} nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

□

Proposition 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sous-additive. Soit

$$\beta = \inf \left\{ \frac{f(x)}{x} : x > 0 \right\}$$

Alors, $\frac{f(x)}{x}$ tend vers β lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. Nous allons traiter le cas où $\beta \in \mathbb{R}$ (c'est le cas, par exemple, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). La preuve s'adapte facilement si $\beta = -\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a > 0$ tel que $\frac{f(a)}{a} < \beta + \varepsilon$. La fonction f est continue sur le segment $[a, 2a]$, elle y est donc majorée. Soit A un majorant de f sur $[a, 2a]$.

Soit $x \geq a$. Soit n l'unique entier naturel tel que $x \in [(n+1)a, (n+2)a]$. Écrivons

$$x = na + (x - na)$$

Par la sous-additivité de f ,

$$f(x) \leq f(na) + f(x - na) \leq nf(a) + f(x - na)$$

De là,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &\leq n \frac{f(a)}{x} + \frac{f(x - na)}{x} \\ &= \frac{na}{x} \frac{f(a)}{a} + \frac{f(x - na)}{x} \\ &< \frac{na}{x} (\beta + \varepsilon) + \frac{f(x - na)}{x} \end{aligned}$$

Remarquons que $x - na \in [a, 2a]$, et donc $f(x - na) \leq A$. On a donc la double inégalité

$$\beta \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{na}{x} (\beta + \varepsilon) + \frac{A}{x}$$

Remarquons également que

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{x}{na} \leq \frac{n+2}{n}$$

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{x}{na}$ tend donc vers 1. De là, $\frac{na}{x}(\beta + \varepsilon) + \frac{A}{x}$ tend vers $\beta + \varepsilon$. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$,

$$\frac{na}{x}(\beta + \varepsilon) + \frac{M}{x} \leq \beta + 2\varepsilon$$

Pour tout $x \geq \max(a, M)$, on a donc

$$\beta \leq \frac{f(x)}{x} \leq \beta + 2\varepsilon$$

Ainsi, $\frac{f(x)}{x}$ tend vers β lorsque x tend vers $+\infty$. $\square$

Bibliographie

Einar Hille, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS Colloquium Publications Vol. XXXI, 1948.