

Deux suites d'intégrales

Marc Lorenzi

30 avril 2026

Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1 Le lemme de Riemann-Lebesgue

On suppose que f est Riemann-intégrable sur $[0, 2\pi]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Proposition 1.0.1.

$$I_n(f) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Commençons par montrer ce résultat dans le cas où f est une fonction en escalier. Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m}$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, soit y_k la valeur de f sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. On a

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} y_k (\cos nx_k - \cos nx_{k+1})$$

De là,

$$|I_n(f)| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{m-1} |y_k|$$

et donc, $I_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Prenons maintenant f quelconque. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'intégrabilité de f , il existe φ, ψ en escalier sur $[0, 2\pi]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_0^{2\pi} (\psi - \varphi) \leq \varepsilon/2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$|(f(t) - \varphi(t)) \sin nt| \leq f(t) - \varphi(t) \leq \psi(t) - \varphi(t)$$

De là,

$$|I_n(f) - I_n(\varphi)| = \left| \int_0^{2\pi} (f(t) - \varphi(t)) \sin nt \, dt \right| \leq \int_0^{2\pi} (\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme φ est en escalier, $I_n(\varphi)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|I_n(\varphi)| \leq \varepsilon/2$. Pour tout $n \geq N$,

$$|I_n(f)| = |I_n(f) - I_n(\varphi)| + |I_n(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $I_n(f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2 Valeurs absolues

On suppose que f est continue sur $[0, 2\pi]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} f(x) |\sin nx| dx$$

Proposition 2.0.2.

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f$$

Découpons l'intégrale sur les intervalles $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$, où $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Par Chasles,

$$I_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x) |\sin nx| dx = \sum_{k=0}^{2n-1} I_{n,k}$$

Dans $I_{n,k}$, posons $x = t/n + k\pi/n$. Il vient

$$I_{n,k} = \frac{1}{n} \int_0^\pi f\left(\frac{t}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) |\sin(t + k\pi)| dt = \frac{1}{n} \int_0^\pi f\left(\frac{t}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \sin t dt$$

En appliquant la première formule de la moyenne, il existe $c_k \in [0, \pi]$ tel que

$$I_{n,k} = \frac{1}{n} f\left(\frac{c_k}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{n} f\left(\frac{c_k}{n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons $\xi_k = c_k/n + k\pi/n$. On a $\xi_k \in [k\pi/n, (k+1)\pi/n]$ et

$$I_{n,k} = \frac{2}{n} f(\xi_k)$$

Ainsi,

$$I_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k)$$

Considérons la subdivision régulière de l'intervalle $[0, 2\pi]$

$$\sigma_n = (k\pi/n)_{0 \leq k \leq 2n}$$

Pointons cette subdivision avec

$$\Xi_n = (\xi_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$$

En posant $S_n = (\sigma_n, \Xi_n)$, la somme de Riemann associée à f et S_n est

$$\mathcal{R}(f, S_n) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k)$$

Ainsi,

$$I_n = \frac{2}{\pi} \mathcal{R}(f, S_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f$$