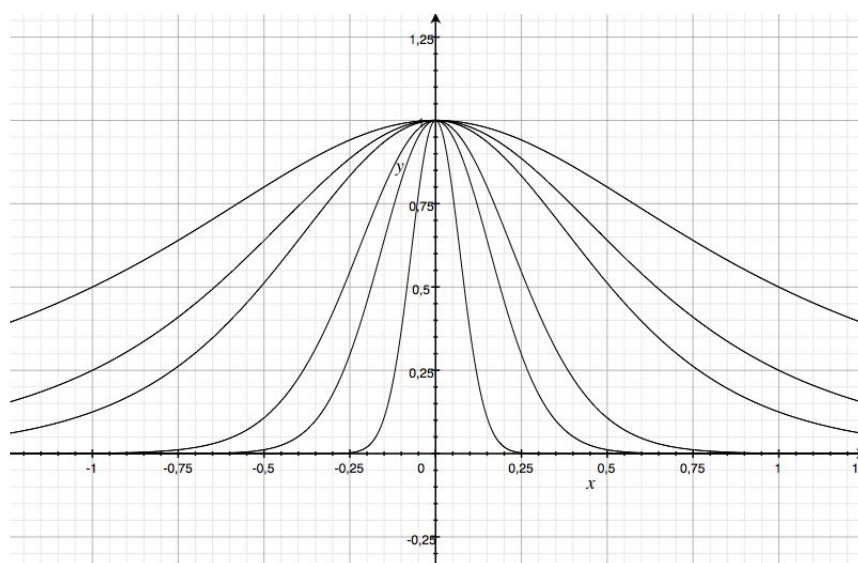


Une suite d'intégrales

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$ on pose

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

On définit ainsi une fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.



La fonction f_n , primitive d'une fonction positive, est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$f_n(x) \leq \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, f_n a une limite réelle en $+\infty$. Notons L_n cette limite.

Tout d'abord, $L_1 = \frac{\pi}{2}$. Soit maintenant $n \geq 1$. Faisons une intégration par parties sur $f_n(x)$. Il vient

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left[\frac{t}{(t^2 + 1)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int_0^x \frac{((t^2 + 1) - 1)dt}{(t^2 + 1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n(f_n(x) - f_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2nf_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1)f_n(x)$$

Faisons tendre x vers $+\infty$. Le terme tout intégré tend vers 0, et on en déduit

$$L_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} L_n$$

Par une simple cascade il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$L_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2} L_1$$

On multiplie en haut et en bas de la fraction par son dénominateur pour obtenir

$$L_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}$$

Quel est le comportement de L_n lorsque n tend vers l'infini? Utilisons la formule de Stirling :

$$L_n \sim \frac{\left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-2} \sqrt{2\pi(2n-2)\pi}}{2^{2n-1} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{2n-2} 2\pi(n-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

En particulier, L_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Remarque : L_n est en réalité une intégrale généralisée :

$$L_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

Le changement de variable $t = \tan \theta$ donne

$$\begin{aligned} L_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(\tan^2 \theta + 1)^n} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \\ &= W_{2n-2} \end{aligned}$$

où

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$$

est la n ième intégrale de Wallis.