

Suites récurrentes

Marc Lorenzi

1 Introduction

Dans cet article, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Étant donnée une fonction $f : I \rightarrow I$ continue sur I , on s'intéresse aux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ définies par récurrence par $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$. La fonction f est continue en ℓ , donc, $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$ lorsque n tend vers l'infini. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ converge aussi vers ℓ . Donc $f(\ell) = \ell$.

Que dire de la réciproque de ce résultat ? Supposons qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. La suite (u_n) converge-t-elle vers ℓ ? La réponse est non en général, la raison la plus immédiate étant que la fonction f peut posséder plusieurs points fixes. Mais même dans le cas où f a un unique point fixe ℓ , la suite (u_n) peut fort bien diverger.

Dans la discussion qui va suivre, les taux d'accroissement de f , c'est à dire les quantités $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ où $x, y \in I, x \neq y$, jouent un rôle important. Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas idéal où ces taux sont majorés en valeur absolue sur l'intervalle I par un réel k tel que $0 \leq k < 1$. La fonction f est alors *k-contractante* sur I . Elle possède au plus un point fixe ℓ et si I est un intervalle *fermé*, l'existence du point fixe est assurée. La suite (u_n) converge vers ℓ . Enfin, on peut estimer la quantité $|u_n - \ell|$ en fonction de k , u_0 , n et ℓ .

La situation n'est pas toujours aussi idéale. En général, on connaît l'existence d'un point fixe et le comportement de la fonction f *au voisinage* de ce point fixe. Dans cette situation nous supposons que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et que f possède un point fixe ℓ . Nous verrons que, selon les valeurs de $f'(\ell)$, le comportement de la suite (u_n) (convergence ou divergence, vitesse de convergence) peut être étudié. Le théorème des accroissements finis jouera dans cette étude un rôle essentiel.

Bien entendu, la connaissance de $f'(\ell)$ ne donne des informations qu'au voisinage de ℓ . Elle ne permet pas d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour des valeurs quelconques de u_0 , mais seulement lorsque u_0 est choisi *suffisamment proche* de ℓ . Nous examinerons cependant quelques exemples pour lesquels nous nous poserons la question de la convergence de la suite (u_n) avec $u_0 \in I$ arbitraire, et pas forcément voisin de ℓ .

2 Applications contractantes

2.1 Le théorème de Banach

Définition 1. Soit k un réel vérifiant $0 \leq k < 1$. L'application $f : I \rightarrow I$ est dite k -contractante lorsque

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

En d'autres termes, une application est contractante lorsqu'elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$. Remarquons également qu'une application contractante est continue.

Proposition 1. Soit $k \in [0, 1[$. Soit $f : I \rightarrow I$ une application k -contractante. Alors f possède au plus un point fixe.

Démonstration. Soient $x, y \in I$ deux points fixes de f . On a

$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Ainsi, $(1 - k)|x - y| \leq 0$. Mais $1 - k > 0$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 2. Supposons que l'application k -contractante f a un point fixe ℓ . Alors, pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration. Remarquons que pour tout entier n

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$$

On en déduit par une récurrence immédiate que

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

La convergence de (u_n) vers ℓ est claire. En effet $0 \leq k < 1$ et k^n tend donc vers 0. $\square$

Ce résultat est en soi satisfaisant : dès qu'un point fixe est connu, la convergence de la suite vers le point fixe est assurée. Si en outre l'intervalle I est fermé, on peut faire mieux.

Proposition 3.

Soit $f : I \rightarrow I$ une application contractante où I est un intervalle fermé. Alors f possède un point fixe.

Remarque : La démonstration de ce résultat utilise la notion de série. Elle pourra être sautée en première lecture.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow I$ une application k -contractante, où $0 \leq k < 1$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

Pour $n = 0$ c'est évident. Supposons cette inégalité vérifiée pour un entier n . On a alors

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1}|u_1 - u_0|$$

la dernière inégalité résultant de l'hypothèse de récurrence.

La série de terme général $u_{i+1} - u_i$ converge absolument car

$$|u_{i+1} - u_i| \leq k^i |u_1 - u_0|$$

et le majorant est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $k < 1$. La série de terme général $u_{i+1} - u_i$ est donc convergente. Remarquons maintenant que

$$u_{n+1} - u_0 = \sum_{i=0}^n (u_{i+1} - u_i)$$

par télescopage. Mais le membre de droite de cet égalité n'est autre que la n ème somme partielle de notre série convergente. Ainsi, $u_{n+1} - u_0$ converge, donc la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ . Comme l'intervalle I est fermé, on a $\ell \in I$. Comme nous l'avons vu dans l'introduction de l'article, la continuité de f en ℓ assure que $f(\ell) = \ell$. $\square$

Les résultats ci-dessus méritent d'être résumés dans un théorème : le théorème du point fixe de Banach.

Proposition 4. [Banach] Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $k \in [0, 1[$. Soit $f : I \rightarrow I$ une application k -contractante. Alors

- f possède un unique point fixe ℓ .
- Pour tout $u_0 \in I$, la suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ , et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

Remarquons pour terminer que si l'intervalle I n'est pas supposé fermé on ne peut plus conclure à l'existence d'un point fixe. Cependant, s'il existe un point fixe il est alors unique et les conclusions du théorème relatives à la suite (u_n) restent valides.

2.2 Un exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}| \\ &= \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \\ &\leq \frac{1}{2} |x-y| \end{aligned}$$

L'application f est ainsi $\frac{1}{2}$ -contractante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle fermé, elle y possède par le théorème de Banach un unique point fixe. En l'occurrence, ce point fixe est l'unique réel positif ℓ tel que $\ell = \sqrt{1+\ell}$, ou encore $\ell^2 - \ell - 1 = 0$, à savoir $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour tout $u_0 \geq 0$, la suite (u_n) converge vers ℓ , et on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|$$

La suite (u_n) et son comportement sont représentés sur la figure 1

Quittons maintenant le cadre idéal et rassurant des applications contractantes. Dans toute la suite, nous supposons donnée une fonction $f : I \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Nous supposons également que $\ell \in I$ est un point fixe de f et nous discutons selon la valeur de $f'(\ell)$ (des conditions moins restrictives que la classe $\mathcal{C}^1$ pourraient être choisies comme, par exemple, la simple dérivabilité de f en ℓ). Nous allons voir que

- Si $|f'(\ell)| < 1$ et u_0 est assez proche de ℓ , la suite (u_n) converge vers ℓ .

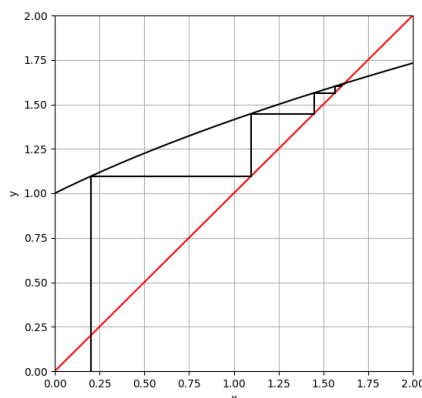


FIGURE 1 – Application contractante : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

- Si $|f'(\ell)| > 1$, la suite (u_n) ne peut pas converger vers ℓ à moins que l'un des termes de la suite ne soit égal exactement à ℓ .
- Si $f'(\ell) = \pm 1$ et que l'on possède, au voisinage de ℓ , un développement limité de f d'une certaine forme, alors pour tout u_0 suffisamment proche de ℓ , la suite (u_n) converge vers ℓ et on a un équivalent intéressant de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Dans le cas où $f'(\ell) = \pm 1$ nous ne serons pas exhaustifs. Nous nous contenterons d'examiner des conditions qui nous permettent de décider la convergence et d'estimer la vitesse de convergence de u_n vers ℓ .

3 Point attractif

On suppose dans cette section que $|f'(\ell)| < 1$. Nous allons montrer que, pourvu que u_0 soit suffisamment proche de ℓ , la suite (u_n) converge vers ℓ .

3.1 Convergence de la suite (u_n)

Proposition 5. Pour tout réel k vérifiant $|f'(\ell)| < k < 1$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |x - \ell| \leq \alpha \Rightarrow |f'(x)| \leq k$$

Démonstration. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée f' est continue en ℓ . On applique la définition de la continuité à la fonction $|f'|$, continue elle aussi en ℓ . Soit $\varepsilon = k - |f'(\ell)| > 0$. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|x - \ell| \leq \alpha \Rightarrow ||f'(x)| - |f'(\ell)|| \leq \varepsilon$$

De là, $|f'(x)| \leq \varepsilon + |f'(\ell)| = k$. $\square$

Donnons nous dans ce qui suit deux tels réels k et α , et notons $J = I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$. J est encore un intervalle, et cet intervalle contient ℓ .

Corollaire 6. La fonction f est k -contractante sur l'intervalle J :

$$\forall x, y \in J, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis. $\square$

Il serait tentant de conclure que tout est réglé par le théorème de Banach, mais ce n'est pas le cas pour deux raisons. Tout d'abord, J n'est pas nécessairement un intervalle fermé. Mais la remarque faite à la fin de la section I montre que cela n'est pas grave. Mais surtout, rien ne nous garantit *a priori* que si $x \in J$ alors $f(x) \in J$. Il nous faut d'abord prouver ce résultat.

Proposition 7. Pour tout $x \in J$, on a $f(x) \in J$.

Démonstration. Soit $x \in J$. En d'autres termes, $x \in I$ et $|x - \ell| \leq \alpha$. On a alors

$$|f(x) - \ell| = |f(x) - f(\ell)| \leq k|x - \ell| \leq k\alpha \leq \alpha$$

De plus, $f(x) \in I$ puisque $f : I \rightarrow I$. Ainsi, $f(x) \in I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha] = J$. $\square$

Proposition 8. On suppose que $u_0 \in J$. Alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
- La suite (u_n) converge vers ℓ .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Démonstration. Puisque nous avons vu que $f : J \rightarrow J$ et que $\ell \in J$ est un point fixe, les conclusions du théorème de Banach sont réalisées. $\square$

Remarquons, avant de passer à un exemple, le caractère local de notre résultat : l'intervalle J est défini à partir d'un réel $\alpha > 0$ résultant de la continuité de f' en ℓ . On ne connaît en général pas une valeur explicite de α . Tout ce que nous pouvons dire est que si u_0 est suffisamment proche de ℓ , la suite converge vers ℓ . Dans l'exemple qui suit, la fonction a le bon goût d'être contractante ce qui nous permettra d'énoncer un résultat global, pour tout u_0 .

3.2 Un exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Remarquons que, quelle que soit la valeur de u_0 , on a $u_1 \in [-1, 1]$ puis, pour tout $n \geq 2$, $u_n \in [0, 1]$. Il n'est donc pas restrictif de prendre plutôt $u_0 \in [0, 1]$ et de s'intéresser à la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = \cos x$. Cet exemple aurait tout aussi bien pu avoir sa place dans la section I sur les fonctions contractantes. En effet, on a pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| = |\sin x| \leq |\sin 1| < 1$$

Par l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est donc $(\sin 1)$ -contractante sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Le théorème de Banach assure alors l'unicité d'un point fixe pour f , ℓ (remarquons tout de même que sur cet exemple l'étude de la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$ aurait montré existence et unicité de ℓ de façon tout à fait élémentaire). Toujours grâce au théorème de Banach, la suite (u_n) converge vers ℓ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \ell| \leq \sin^n 1 |u_0 - \ell|$$

La figure 2 montre le comportement de la suite avec $u_0 = 1$.

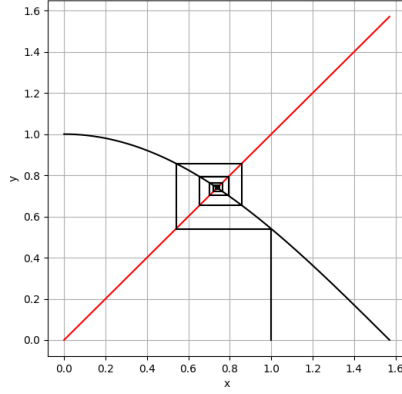


FIGURE 2 – Point attractif : $u_{n+1} = \cos u_n$

3.3 Estimer l'erreur commise

Considérons la fonction Python suivante :

```
def approx_lim(f, u0, epsilon):
    u, v = u0, f(u0)
    while abs(v - u) > epsilon:
        u, v = v, f(v)
    return u
```

La fonction `approx_lim` prend en paramètres une fonction $f : I \rightarrow I$, un réel $u_0 \in I$ et un réel $\varepsilon > 0$. Elle renvoie u , le premier terme de la suite (u_n) tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. En supposant que la suite (u_n) converge vers ℓ , que peut-on dire de $|u - \ell|$? En général rien : ce critère de sortie de boucle n'a aucune raison de fournir une valeur approchée fiable de ℓ . Le fait de savoir que $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ ne permet pas d'affirmer que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Néanmoins, lorsque la fonction f est k -contractante, on a le résultat suivant :

Proposition 9. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. On a alors $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{1-k}$

Démonstration. Par une récurrence sans difficulté sur p , on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$|u_{n+p} - u_{n+p-1}| \leq k^p |u_{n+1} - u_n|$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &= \left| \sum_{j=n}^{n+p-1} (u_{j+1} - u_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} |u_{j+1} - u_j| \\ &\leq |u_{n+1} - u_n| \sum_{j=0}^{p-1} k^j \\ &= |u_{n+1} - u_n| \frac{1 - k^p}{1 - k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 - k} \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre p vers $+\infty$: $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{1-k}$. $\square$

Si l'on veut une valeur approchée de ℓ à ε près, il suffit donc de choisir un entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq (1-k)\varepsilon$. Pour un tel entier, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Si on connaît la valeur de k , une fonction renvoyant une valeur approchée de ℓ à ε près sera donc

```
def approx_lim(f, u0, k, epsilon):
    u, v = u0, f(u0)
    while abs(v - u) > (1 - k) * epsilon:
        u, v = v, f(v)
    return u
```

Pour reprendre l'exemple de la fonction cosinus, si l'on veut obtenir ℓ à 10^{-10} près il suffit de choisir n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq (1 - \sin 1)10^{-10} \simeq 1.58 \cdot 10^{-11}$.

3.4 « Super-convergence »

Nous supposons dans cette section que $f'(\ell) = 0$. Nous supposons également que f est deux fois dérivable en ℓ et que $f''(\ell) \neq 0$. Pour u_0 suffisamment proche de ℓ la suite (u_n) converge bien entendu vers ℓ . Mais la convergence de cette suite va être bien plus rapide que dans les autres cas. On a pour tout x voisin de ℓ

$$f(x) = f(\ell) + (x - \ell)f'(\ell) + \frac{1}{2}(x - \ell)^2 f''(\ell) + o((x - \ell)^2)$$

c'est à dire

$$f(x) = \ell + \frac{1}{2}(x - \ell)^2 f''(\ell) + o((x - \ell)^2)$$

Ainsi,

$$f(x) - \ell \sim \frac{1}{2}(x - \ell)^2 f''(\ell)$$

Pour tout réel k tel que $\frac{1}{2}|f''(\ell)| < k$ et tout x voisin de ℓ on a donc

$$|f(x) - \ell| \leq k|x - \ell|^2$$

Choisissons u_0 afin que, pour tout entier n , l'inégalité ci-dessus soit applicable à u_n . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - \ell| \leq k|u_n - \ell|^2$$

Proposition 10. Pour tout entier n ,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{k} (k|u_0 - \ell|)^{2^n}$$

Sans entrer dans les détails techniques, une telle convergence est dite *quadratique*.

Démonstration. On fait une récurrence sur n . Pour $n = 0$ c'est évident. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{k} (k|u_0 - \ell|)^{2^n}$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq k|u_n - \ell|^2 \\ &\leq k\left(\frac{1}{k} (k|u_0 - \ell|)^{2^n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{k} (k|u_0 - \ell|)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

□

Supposons pour fixer les idées que $k = \frac{1}{2}$. Un choix de u_0 tel que $|u_0 - \ell| \leq 1$, par exemple, donne

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

Pour avoir une approximation de ℓ à 10^{-1000} près, il suffit donc de choisir n tel que $\frac{1}{2^{2^n - 1}} \leq 10^{-1000}$, c'est à dire $2^{2^n - 1} \geq 10^{1000}$. Notant $\lg$ le logarithme en base 2, on obtient $2^n - 1 \geq 1000 \lg 10$ puis $n \geq \lg(1000 \lg 10 + 1) \simeq 11.7$. Il suffit donc de prendre $n = 12$.

3.5 Un exemple

Considérons $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$. Les points fixes de f sont 0 et $\frac{1}{2}$. On peut ici calculer explicitement la quantité $u_n - \frac{1}{2}$. En effet, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{2} &= 2u_n - 2u_n^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit par une récurrence analogue à celle faite un peu plus haut, que

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2u_0 - 1)^{2^n}$$

Pour $u_0 \in]0, 1[$, on a $-1 < 2u_0 - 1 < 1$, de sorte que $(2u_0 - 1)^{2^n}$ tend (quadratiquement) vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$ pour tout u_0 tel que $0 < u_0 < 1$. La figure 3 montre le comportement de la suite avec $u_0 = 0.1$.

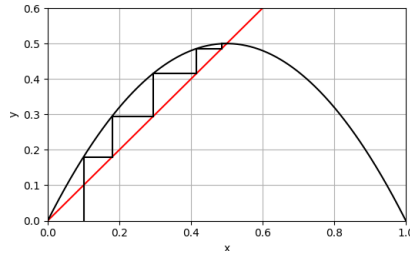


FIGURE 3 – Convergence quadratique : $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$

4 Point répulsif

On suppose dans cette section que $|f'(\ell)| > 1$. Nous allons montrer que, sauf coïncidence extraordinaire, la suite (u_n) ne converge pas vers ℓ .

Proposition 11. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$. Alors la suite (u_n) ne tend pas vers ℓ .

Démonstration. Soit k un réel vérifiant $1 < k < |f'(\ell)|$. La continuité de $|f'|$ en ℓ montre l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in J = I \cap [\ell - \alpha, \ell + \alpha]$, $|f'(x)| \geq k$. Supposons que la suite (u_n) tend vers ℓ . Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in J$. On a alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = |u_n - \ell| |f'(c_n)|$$

d'après le théorème des accroissements finis, où $u_n < c_n < \ell$ (ou bien $\ell < c_n < u_n$). De là

$$|u_{n+1} - \ell| \geq k |u_n - \ell|$$

Par une récurrence facile on montre alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|u_{N+p} - \ell| \geq k^p |u_N - \ell|$$

Comme $k > 1$ et $u_N - \ell \neq 0$, on en déduit que $|u_{N+p} - \ell|$ tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers l'infini, ce qui contredit la convergence de la suite (u_n) vers ℓ . $\square$

Prenons par exemple la fonction $x \mapsto 2 \sin x$. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$. Le point 0 est donc un point fixe répulsif. Partant de $u_0 = 0.01$, très proche de 0, la suite (u_n) s'écarte de 0. Dans ce cas, il se trouve que la suite converge ... mais certainement pas vers 0!

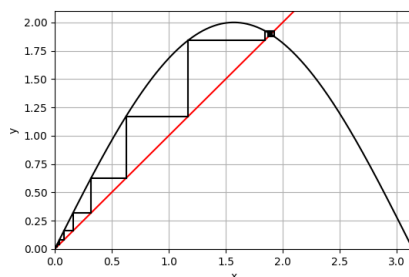


FIGURE 4 – Point répulsif : $u_{n+1} = 2 \sin u_n$

Il reste maintenant à examiner les cas « limites » $f'(\ell) = \pm 1$. Dans ces cas, il peut y avoir convergence ou pas. Nous allons dans ce qui suit rester modestes et nous contenter d'examiner quelques conditions suffisantes de convergence de la suite (u_n) vers ℓ .

5 Pente égale à 1

Nous allons pour simplifier les notations nous placer dans le cas où $\ell = 0$. On peut toujours s'y ramener en considérant la suite de terme général $u_n - \ell$.

5.1 Un critère de convergence

Proposition 12. On suppose qu'il existe deux réels $\lambda > 0$ et $p > 1$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = x - \lambda x^p + o(x^p)$$

Alors, en choisissant $u_0 > 0$ suffisamment proche de 0, la suite (u_n) converge vers 0.

Si p est un entier impair, le résultat précédent reste valable pour $u_0 < 0$ suffisamment proche de 0.

Démonstration. Pour tout $x > 0$ assez proche de 0, $f(x) - x$ est du signe de $-\lambda x^p$, c'est à dire $f(x) - x < 0$. De plus, toujours pour tout $x > 0$ assez proche de 0, $f(x)$ est du signe de x , donc $f(x) > 0$.

Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \alpha]$, $0 < f(x) < x$. Prenons $0 < u_0 \leq \alpha$. On a $u_1 = f(u_0)$, donc $0 < u_1 < u_0 \leq \alpha$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers $\ell \in [0, \alpha]$ tel que $f(\ell) = \ell$. Or, pour tout $x \in]0, \alpha]$, $f(x) < x$ donc $f(x) \neq x$. Ainsi, $\ell = 0$.

Dans le cas où p est un entier impair et $u_0 < 0$, on se ramène au cas $u_0 > 0$ en considérant la suite (v_n) définie par $v_n = -u_n$. $\square$

Proposition 13. Sous les conditions de la proposition précédente, si $u_0 > 0$ est suffisamment proche de 0, alors (u_n) converge vers 0 et

$$u_n \sim \left(\frac{1}{\lambda n(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^a - u_n^a &= (u_n - \lambda u_n^p + o(u_n^p))^a - u_n^a \\ &= u_n^a [(1 - \lambda u_n^{p-1} + o(u_n^{p-1}))^a - 1] \\ &\sim u_n^a (-\lambda a u_n^{p-1}) \\ &= -\lambda a u_n^{a+p-1} \end{aligned}$$

Prenons $a = 1 - p$. On obtient que $u_{n+1}^{1-p} - u_n^{1-p} \rightarrow \lambda(p-1)$ lorsque n tend vers l'infini. Appliquons le théorème de Césàro :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (u_{k+1}^{1-p} - u_k^{1-p}) = \frac{1}{n} (u_{n+1}^{1-p} - u_0^{1-p})$$

tend encore vers $\lambda(p-1)$. Comme $\frac{1}{n} u_0^{1-p}$ tend vers 0, il vient que $\frac{1}{n} u_{n+1}^{1-p}$ tend vers $\lambda(p-1)$. Ainsi,

$$u_{n+1}^{1-p} \sim \lambda n(p-1)$$

d'où le résultat en élevant l'équivalent à la puissance $\frac{1}{1-p}$. $\square$

Proposition 14. Sous les conditions de la proposition précédente, si $p > 3$ est un *entier impair* et $u_0 < 0$ est suffisamment proche de 0, alors (u_n) converge vers 0 et

$$u_n \sim - \left(\frac{1}{\lambda n(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Démonstration. La suite $(-u_n)$ vérifie les conditions de la proposition précédente. $\square$

5.2 Deux exemples

5.2.1 Sinus

Prenons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 1]$. On peut donc sans restriction prendre $u_0 \in [-1, 1]$. Quitte à considérer la suite $(-u_n)$, on peut même supposer que

$0 < u_0 \leq 1$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$. Par ailleurs, pour tout réel $x \geq 0$, $\sin x \leq x$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0. Elle converge vers un réel ℓ tel que $\sin \ell = \ell$. Il est facile de voir qu'il existe un unique réel vérifiant cela, à savoir 0. On a au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

On peut donc utiliser la proposition précédente avec $\lambda = \frac{1}{6}$ et $p = 3$. On en déduit

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

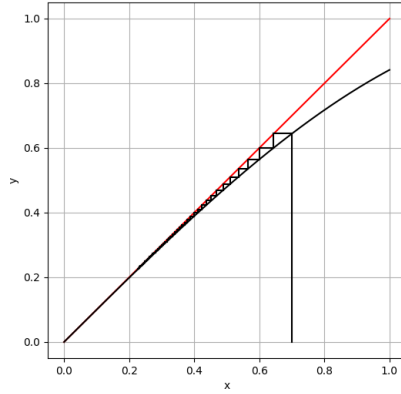


FIGURE 5 – Pente 1 au point fixe : $u_{n+1} = \sin u_n$

5.2.2 Parabole

Prenons $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = x(1 - x)$. Prenons $u_0 \in]0, 1[$. On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$. De plus, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0. Elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell - \ell^2 = \ell$, c'est à dire $\ell = 0$.

La proposition précédente s'applique avec $\lambda = 1$ et $p = 2$. On en déduit

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

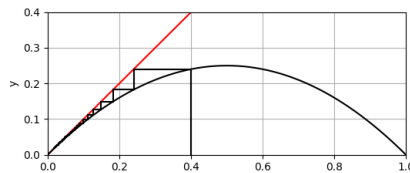


FIGURE 6 – Pente 1 au point fixe : $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

6 Pente égale à -1

Ici encore, nous allons prendre $\ell = 0$ pour simplifier les notations. Nous allons nous intéresser à un cas particulier assurant la convergence.

6.1 Une condition suffisante de convergence

Proposition 15. On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ et un réel μ tels que $\mu + \lambda^2 > 0$ et, au voisinage de 0,

$$f(x) = -x - \lambda x^2 + \mu x^3 + o(x^3)$$

Si $u_0 > 0$ est choisi suffisamment proche de 0 alors la suite (u_n) converge vers 0. De plus

$$u_n \sim (-1)^n \sqrt{\frac{1}{2n(\mu + \lambda^2)}}$$

Si $u_0 < 0$, il faut remplacer $(-1)^n$ par $(-1)^{n+1}$.

Démonstration. On a

$$f(x)^2 = (-x - \lambda x^2 + \mu x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + 2\lambda x^3 + o(x^3)$$

On a également $f(x)^3 = -x^3 + o(x^3)$. De là,

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= -f(x) - \lambda f(x)^2 + \mu f(x)^3 + o(f(x)^3) \\ &= x + \lambda x^2 - \mu x^3 - \lambda(x^2 + 2\lambda x^3) - \mu x^3 + o(x^3) \\ &= x - 2(\mu + \lambda^2)x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Prenons $u_0 > 0$ voisin de 0. On a pour tout entier n , $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$. La suite (u_{2n}) vérifie les conditions de la propriété V.2, en remplaçant λ par $2(\mu + \lambda^2) > 0$ et en prenant $p = 3$. On a donc

$$u_{2n} \sim \sqrt{\frac{1}{4n(\mu + \lambda^2)}} = (-1)^{2n} \sqrt{\frac{1}{2(2n)(\mu + \lambda^2)}}$$

Comme $f(x) \sim -x$, on a $u_1 < 0$, toujours à la condition que u_0 soit suffisamment proche de 0. La suite (u_{2n+1}) vérifie donc les conditions de la propriété V.3. Ainsi,

$$u_{2n+1} \sim -\sqrt{\frac{1}{4n(\mu + \lambda^2)}} \sim (-1)^{2n+1} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)(\mu + \lambda^2)}}$$

En rassemblant les deux équivalents, on obtient

$$u_n \sim (-1)^n \sqrt{\frac{1}{2n(\mu + \lambda^2)}}$$

□

6.2 Un exemple

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = 3x(1 - x)$. Si la suite (u_n) converge c'est vers $\ell \in [0, 1]$ tel que $\ell = 3(\ell - \ell^2)$, c'est à dire $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{2}{3}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 3(1 - 2x)$. Ainsi, $f'(0) = 3 > 1$ et 0 est un point répulsif. En revanche, $f'(\frac{2}{3}) = -1$. Posons $g(x) = f(\frac{2}{3} + x) - \frac{2}{3}$. On a

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3\left(\frac{2}{3} + x\right) - 3\left(\frac{2}{3} + x\right)^2 - \frac{2}{3} \\
&= 2 + 3x - 3\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3}x + x^2\right) - \frac{2}{3} \\
&= 2 + 3x - \left(\frac{4}{3} + 4x + 3x^2\right) - \frac{2}{3} \\
&= -x - 3x^2 \\
&= -x - 3x^2 + 0x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

On est donc en mesure d'utiliser les résultats du paragraphe précédent en choisissant $\lambda = 3$ et $\mu = 0$. Si u_0 est choisi suffisamment proche de $\frac{2}{3}$, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$. En posant $v_n = u_n - \frac{2}{3}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = g(v_n) = -v_n - 3v_n^2$$

Pour $v_0 > 0$ assez proche de 0, la suite (v_n) tend vers 0, et

$$v_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{18n}} = \frac{(-1)^n}{6} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

D'où

$$u_n - \frac{2}{3} \sim \frac{(-1)^n}{6} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$u_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{6} \sqrt{\frac{2}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

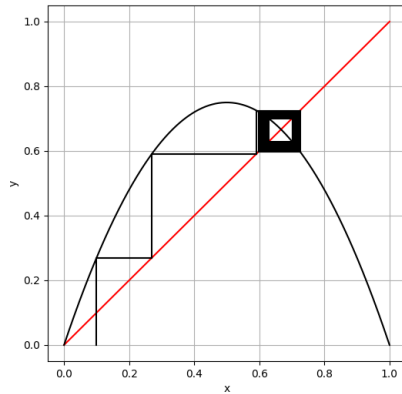


FIGURE 7 – Pente -1 au point fixe : $u_{n+1} = 3u_n(1 - u_n)$

Dans le graphique de la figure 7 nous avons pris $u_0 = 0.1$, un point pas si proche que cela du point fixe $\frac{2}{3}$ de la fonction f . Il y a tout de même convergence vers $\frac{2}{3}$. Quels sont précisément les réels u_0 pour lesquels la suite converge vers $\frac{2}{3}$? Nous allons montrer que la convergence de la suite vers $\frac{2}{3}$ est assurée pour *toutes* les valeurs de $u_0 \in]0, 1[$. Nous écartons bien entendu $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$ puisque dans ces deux cas la suite est nulle, ou stationnaire nulle à partir du rang 1.

Proposition 16. Pour tout $u_0 \in]0, 1[$, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$. Le développement asymptotique ci-dessus (ou son analogue en remplaçant $(-1)^n$ par $-(-1)^n$) reste valable.

Lemme 17. Soit $x \in [0, 1]$.

- Si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ alors $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$
- Si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ alors $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$

Démonstration. Constater que $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ et $f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{16} \geq \frac{1}{3}$ et utiliser les variations de f . $\square$

Lemme 18. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f \circ f(x) - x = -x(3x - 2)^3$.

Démonstration. On a

$$f \circ f(x) - x = 3f(x)(1 - f(x)) - x = 8x - 36x^2 + 54x^3 - 27x^4$$

qui est bien égal à $-x(3x - 2)^3$. $\square$

Une conséquence immédiate du lemme précédent est :

Lemme 19. Soit $x \in [0, 1]$.

- Si $x \leq \frac{2}{3}$ alors $f \circ f(x) \geq x$.
- Si $x \geq \frac{3}{4}$ alors $f \circ f(x) \leq x$.

6.2.1 Le cas $\frac{1}{3} \leq u_0 \leq \frac{2}{3}$

Par le lemme 1, on a $\frac{2}{3} \leq u_1 \leq \frac{3}{4}$. Puis $\frac{1}{3} \leq u_2 \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} \leq u_3 \leq \frac{3}{4}$. De plus, $u_2 = f \circ f(u_0) \geq u_0$ et $u_3 = f \circ f(u_1) \leq u_1$.

Par une récurrence facile, on montre que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \leq u_{2n} \leq \frac{2}{3}$.
- La suite (u_{2n}) est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \leq u_{2n+1} \leq \frac{3}{4}$.
- La suite (u_{2n+1}) est décroissante.

La suite (u_{2n}) est croissante, majorée par $\frac{2}{3}$, elle tend donc vers un réel ℓ' vérifiant $0 < u_0 \leq \ell' \leq \frac{2}{3}$ tel que $f \circ f(\ell') = \ell'$. Mais le lemme 2 nous montre que les seules racines de $f \circ f - f$ sont 0 et $\frac{2}{3}$. Donc $\ell' = \frac{2}{3}$. De même, la suite (u_{2n+1}) décroît et converge vers $\frac{2}{3}$. Ainsi, par la réciproque du théorème sur les suites extraites, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

6.2.2 Le cas $\frac{2}{3} \leq u_0 \leq \frac{3}{4}$

Ce cas est analogue au précédent, en échangeant nombres pairs et nombres impairs.

6.2.3 Le cas $0 < u_0 \leq \frac{1}{3}$

Lemme 20. Il existe un entier n tel que $\frac{1}{3} \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.

Démonstration. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$. Sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ on a $f(x) \geq x$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est croissante. De plus cette suite est majorée par $\frac{1}{3}$. Elle converge donc vers un réel ℓ' vérifiant $0 < u_0 \leq \frac{1}{3}$ et $f(\ell') = \ell'$. Mais un tel réel n'existe pas. Il existe donc un entier n tel que $u_n > \frac{1}{3}$. Prenons un tel entier n minimal. On a $u_{n-1} \leq \frac{1}{3}$, donc, par la croissance de f sur $[0, \frac{1}{3}]$, $f(u_{n-1}) = u_n \leq f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$. Ainsi, $\frac{1}{3} < u_n \leq \frac{2}{3}$. $\square$

On est donc ramenés au cas 1 et on en déduit la convergence de la suite (u_n) vers $\frac{2}{3}$.

6.2.4 Le cas $\frac{3}{4} \leq u_0 < 1$

Dans ce cas,

$$0 < u_1 \leq f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} \leq \frac{2}{3}$$

Si $u_1 \leq \frac{1}{3}$, on est ramenés au cas 3. Si, au contraire, $u_1 \geq \frac{1}{3}$, on est ramenés au cas 1. Dans tous les cas, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

6.2.5 Bilan

Ainsi, pour tout $u_0 \in]0, 1[$, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$. Pour tout n suffisamment grand, mettons $n \geq n_0$, u_n appartient à un voisinage de $\frac{2}{3}$ dans lequel le développement asymptotique trouvé plus haut est valide. Comme $n \sim n - n_0$, le développement asymptotique obtenu reste valable, à ceci près que ce que nous avons appelé v_0 peut être strictement positif ou strictement négatif. Ainsi,

$$u_n = \frac{2}{3} + \frac{\varepsilon(-1)^n}{6} \sqrt{\frac{2}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où ε vaut 1 ou -1 .

6.2.6 La fonction ε

La valeur exacte de $\varepsilon = \varepsilon(u_0)$ dépend de celle de u_0 . Appelons n_0 le plus petit entier vérifiant $\frac{1}{3} \leq u_{n_0} \leq \frac{2}{3}$. Si n_0 est pair alors $\varepsilon = -1$. Sinon, $\varepsilon = 1$. Voici le graphe de la fonction $\varepsilon :]0, 1[\rightarrow \{-1, 1\}$, ainsi qu'un zoom pour $u_0 \in]0, \frac{1}{10}]$ et $u_0 \in [\frac{9}{10}, 1[$.

L'allure du graphe de ε nous suggère qu'une étude plus approfondie serait sans doute très intéressante ... mais sortirait du cadre de cet article.

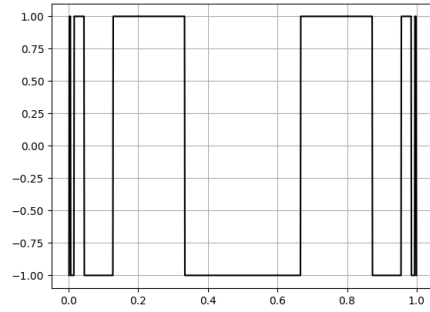


FIGURE 8 – La fonction ε

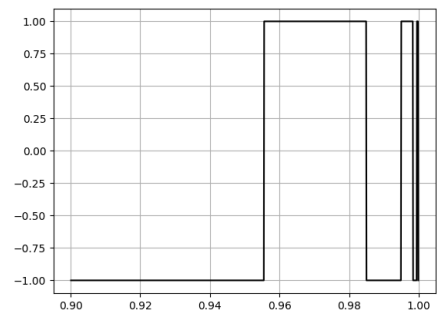
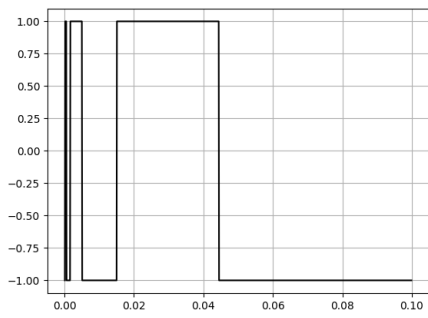


FIGURE 9 – Deux zooms du graphe de ε